Regina Bruder

Modul 4: Sicherung von Basiswissen - Verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus

In diesem Modul geht es insbesondere um folgende Fragestellungen:

Was gehört zum Basiswissen in Mathematik und wie kann es nachhaltig gesichert werden?

Wie kann mit heterogenen Lernvoraussetzungen im Mathematikunterricht so umgegangen werden, dass möglichst viele Schülerinnen und Schüler einer Klasse kognitiv wie motivational angesprochen werden[1] und Lernfortschritte für alle erreicht werden?

Beide Fragenkomplexe sind jedoch so grundlegend und weitgreifend, dass hier lediglich Anregungen zu ihrer Beantwortung gegeben werden können. Zunächst werden Überlegungen vorgestellt, woran man sich orientieren kann, um mathematisches Basiswissen zu beschreiben. Anschließend werden konkrete und bereits erfolgreich praktizierte Methoden vorgestellt, wie das, was als Basiswissen (oder besser: Mathematische Grundlagenkompetenz) identifiziert wurde, auch als verfügbar gesichert werden kann. Im dritten Abschnitt wird gesondert auf Fragen einer Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht (Umgehen mit Heterogenität) eingegangen.

1. Basiswissen im Mathematikunterricht – was ist das, was gehört dazu?

Unter den Wortmarken „Basiswissen“ oder auch „Grundwissen“ zur Mathematik kann man sehr viele Angebote für die Schule oder sogar für ein einschlägiges Studium von verschiedenen Verlagen finden, aber auch von engagierten Lehrkräften, Studenten sowie von Schülern. Diesen Angeboten gemeinsam ist eine mehr oder weniger gelungene strukturierte Auflistung und fachsprachliche Darstellung von Begriffen, Sätzen (Zusammenhängen) und Verfahren zu den jeweiligen mathematischen Themen des Schulstoffes. Diesen mathematischen Stoffelementen wird eine grundlegende Bedeutung zugemessen für erfolgreiches Weiterlernen im Fach Mathematik oder auch in solchen Schulfächern und Fachdisziplinen, die Mathematik explizit anwenden. Als Darstellungsformen sind Merksätze und Aufgabenbeispiele beliebt.

Wo liegt das Problem?

Verfügbare Basiswissenpublikationen beschreiben durch Aufzählen meist abstrakte und isoliert für sich stehende Ergebnisse von nicht näher beschriebenen Lernprozessen und verzichten auf kompetenzorientierte Verknüpfungen. Sie

[1] Vgl. die Zielstellung der Expertise „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ 1997 für Modul 4 unter: http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/blk_prog/gutacht/gut9.htm

enthalten aber auch kaum Begründungen, warum die aufgeführten Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren denn so wichtig und wofür sie grundlegend sind. Meist steht ein traditioneller Stoffkanon für die Schule dahinter.

Zum Nachschlagen und Erinnern im Sinne eines **Wissensspeichers**, den man möglichst sogar selbst angelegt haben sollte, eignen sich solche Basiswissendarstellungen sehr gut, vgl. auch die Beispielseiten für einen von Schülern angelegten Wissensspeicher im Anhang1. Zum Aufnehmen von Wissen in Form von „etwas auswendig lernen" eignen sie sich nicht, weil damit nichts verstanden (vernetzt) wird und viele Lernende schon am großen Umfang solcher Kataloge scheitern. Wo fängt mathematisches Basiswissen an, das man immer verfügbar haben sollte, und wo hört es auf?

Wir unterscheiden im Folgenden Basiswissen und Grundkompetenzen im Sinne von

- **automatisiertem Kopfrechnen und Kopfgeometrie**
- **strukturellen und bildlichen Vorstellungen (insbesondere Terme, Funktionsklassen, geometrische Abbildungen)**
- **Mathematisierungsmustern[2].**

Es wird wenig bestritten, dass es für das Erlernen und Anwenden von Mathematik äußerst hilfreich ist, über gewisse Grundkenntnisse und –fertigkeiten verfügen zu können, denn wie ein altes Sprichwort es schon ausdrückt: „Ohne Wolle kann man nicht stricken!" Hier einige Beispiele:

In den unteren Klassen sind es z.B. gewisse **Kopfrechenfertigkeiten mit natürlichen Zahlen, das Vorstellen und Umwandeln von Größen,** dann **Kenntnisse über das Beschreiben von Anteilen von Ganzen und das Rechnen mit solchen Anteilen** (Bruchrechung, Prozentrechnung).

In der Geometrie geht es u.a. um Begriffe und ein **Vorstellungs- und Darstellungsvermögen** zu ebenen und räumlichen Grundfiguren sowie zu Lagerelationen und Abbildungen.

In den höheren Klassenstufen sind es z.B. **bildhafte und algebraische Vorstellungen über Funktionsklassen**, die zum unverzichtbaren Basiswissen gehören:

- Wie kann man unterschiedliche Wachstumsverläufe mit Funktionen beschreiben? (linear, potenziell, exponentiell, periodisch...)
- Wie verlaufen die Bilder von Wurzelfunktionen?
- Wie erzeugt man mit einem Funktionsterm eine Hyperbel und umgekehrt: Wie lassen sich hyperbelförmige Graphen analytisch beschreiben?
- Mit welchen Funktionsgleichungen könnten die Bilder in Abb.1 erzeugt werden? (Kontrollmöglichkeit mit grafikfähigem Rechner nutzen)

[2] Ein Wissenselement wie ein mathematischer Begriff, Satz oder ein Verfahren wird zu einem Mathematisierungsmuster für die Lernenden, wenn sie dieses Wissenselement in einem Anwendungszusammenhang auf deren erfolgreiche Verwendbarkeit geprüft, die konkrete Anwendung reflektiert und bezüglich der Mathematisierungsanforderungen verallgemeinert haben.

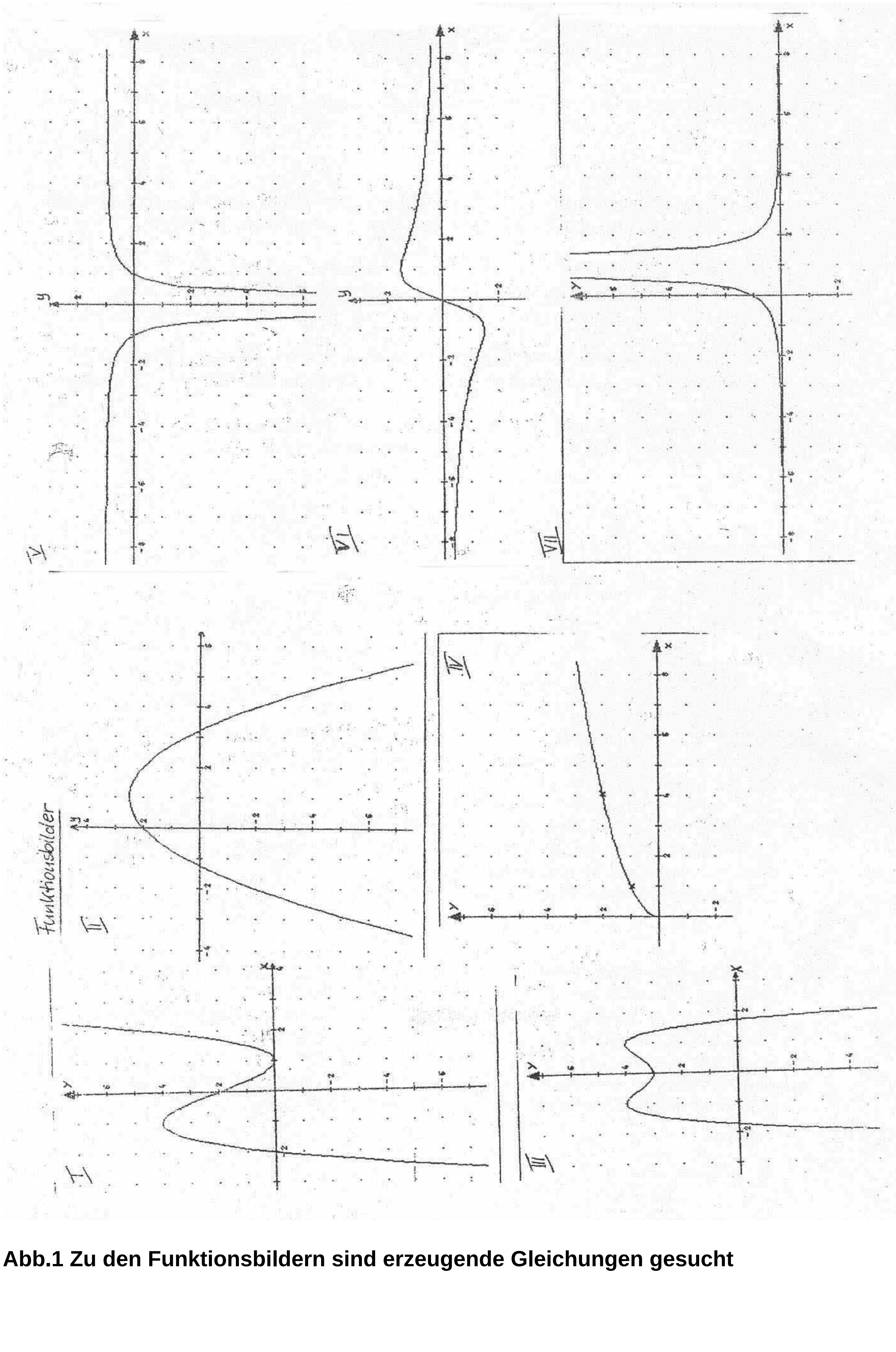


Abb.1 Zu den Funktionsbildern sind erzeugende Gleichungen gesucht

Ein **Aufgabenbeispiel**[3] zum Arbeiten mit unterschiedlichen Wachstumsmodellen auf Basiswissenniveau ist die folgende:

Anna plant mit 18 Jahren eine große Reise nach Südamerika zu machen. Als Sie 16 Jahre alt wird, erhält Sie von ihren Eltern drei Angebote für einen Zuschuss zur Auswahl, die bis zur ihrem 18. Geburtstag (also 2 Jahre) gelten sollen:

Angebot A: Anna erhält sofort 100€, dann jeden Monat 20€ dazu
Angebot B: Anna erhält sofort 0,01 ct, dann jeden Monat das insgesamt bereits erhaltene Geld dazu.
Angebot C: Anna erhält einen Betrag, der sich aus den Volumen eines Würfels berechnet: Die Kantenlänge dieses Würfels entspricht der Zahl der Monate seit ihrem 16 Geburtstag in Zentimeter. Dabei werden für jeden Kubikzentimeter 10 ct ausgezahlt. Wie würdest Du Dich entscheiden?

Lösungen:
Angebot A: lineares Wachstum: $f_A(x) = 100 + 20x$ *(x in Monaten, Ergebnisse in Euro)*
Angebot B: exponentielles Wachstum: $f_B(x) = 0{,}0001 * 2^x$
Angebot C: potenzielles Wachstum: $f_C(x) = 0{,}1 * x^3$
Gewinn nach 2 Jahren (24 Monate seit dem 16. Geburtstag):

Angebot A: $f_A(24) = 580$ *€*
Angebot B: $f_B(24) = 1677{,}72$ *€*
Angebot C: $f_C(24) = 1382{,}40$ *€* *Angebot B ist am lukrativsten.*

Um solche und ähnliche Aufgaben bearbeiten zu können, bedarf es eines mathematischen Basiswissens in Form von **Mathematisierungsmustern.** Die algebraische Struktur und eine grafische Visualisierung verschiedener mathematisch unterscheidbarer Wachstumsarten müssen identifiziert und realisiert werden können.

Beispiele zu den oben genannten Aspekten mathematischer Grundlagenkompetenz befinden sich auch im Anhang2 mit einem Kopfrechentest, der nach der Einführung negativer Zahlen bis zur Oberstufe so beherrscht werden sollte, dass in höchstens 4 Minuten nicht mehr als zwei Fehler auftreten. Danach wird eine erstrebenswerte Variante eines Kopfrechentests vorgestellt, in dem es nicht mehr nur um formales Rechnen ohne Vorstellungsbezüge sondern um einfachste Kontextbezüge zu den Grundrechenarten geht. Das wäre ein sinnvolles Ziel für den Erwerb eines „Kopfrechenführerscheins“ in Analogie zu einschlägigen anderen Zertifikaten außerhalb der Schule. Ergänzt werden diese Überlegungen durch einfache Fragen zu Vorstellungen über Funktionen und Funktionsverläufen, die zur Wiederholung und auch als Lernkontrolle geeignet sind, vgl. Anhang2, Aufgabe3.

Solche auf Grundvorstellungen und Grundverständnis abzielende Aufgabenstellungen lassen sich zu jedem allgemeinbildenden mathematischen Unterrichtsthema finden. Hier noch einige Beispiele, die den Charakter und Typ dieser Aufgabenstellungen unterstreichen sollen:

•*Was ist 10cm² groß?*

[3] Quelle: Portfolio der Albanus-Magnus-Schule Fulda zum Hessischen TI-Projekt 2005, dokumentiert in www.madaba.de

•Gib zwei Beispiele an für Sachverhalte, die sich in der Form a·b=c darstellen lassen und ein Beispiel, das nicht diese Struktur hat.
•Wie ändern sich Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks, wenn beide Seitenlängen halbiert werden?
•Welche Strategien eignen sich zum Berechnen des Flächeninhaltes von zusammengesetzten ebenen Figuren?
•Welche Fehler können passieren beim Multiplizieren von Brüchen und mit welchen anschaulichen Überlegungen kann man sie verhindern?

Inhaltlich begründen lassen sich diese Aufgaben und Anforderungen mit einer Art elementaren Alltags-Rechenkompetenz, aber vor allem mit strukturellen und bildlichen Vorstellungen, die für erfolgreiches Weiterlernen in Mathematik und anderen Unterrichtsfächern mindestens bis zum mittleren Schulabschluss unverzichtbar sind sowie in vielen Situationen auch außerhalb von Schule nützlich sein können.

Bei einem Führerschein für ein Fahrzeug genügt jedoch das Bestehen der theoretischen Prüfung noch nicht, um in den realen Straßenverkehr entlassen zu werden – diese Prüfung ist „nur“ eine notwendige Voraussetzung dafür. Ähnlich ist die Situation mit diesen begrifflichen und technischen Grundlagen in der Mathematik: Sie reichen definitiv nicht, um grundlagenkompetent im Sinne der Bildungsstandards zu sein, sind aber eine mitunter doch unterschätzte Voraussetzung dafür.

Die Beispiele deuten es schon an: Es ist immer eine **Kombination aus Vorstellungen und Fertigkeiten** darin enthalten. Viele bestehende Basiswissenkataloge und Übungsserien leisten diese Verknüpfungen noch nicht. In welchen Kontexten sollen die Lernenden verschiedener Altersstufen die mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten anwenden können und auf welchem Niveau? Auf das Niveauproblem wird im 3.Abschnitt näher eingegangen.

Was nun alles zu einem möglichst **permanent verfügbaren Basiswissen und –können** dazugehören soll, womit nichts anderes als eine gewisse **mathematische Grundlagenkompetenz** beschrieben wird, und wo hier die Grenzen gesetzt werden, darüber gibt es wenig Nachlesbares und viel zu wenig theoretisch fundierte und praxisorientierte Diskussion. Dennoch wird es immer mehr in die Verantwortung der Schulen gelegt, die Vorstellungen der Fachschaft zum Basiswissen und –können im Schulcurriculum zu verankern und schließlich muss jede Lehrkraft schon jetzt jeden Tag entsprechende Entscheidungen fällen.

Woran kann man sich orientieren, wenn an einer Beschreibung mathematischer Grundlagenkompetenz gearbeitet werden soll?

Man kann die von Winter formulierten und in den Bildungsstandards aufgegriffenen drei wünschenswerten Grunderfahrungen in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht heranziehen, um damit zunächst auf einer allgemeineren Ebene die Frage zu beantworten, was man denn durch Mathematikunterricht von der Mathematik **verstanden**, was **behalten** und was auch **anwenden** können sollte?

Winter 1996 schreibt:

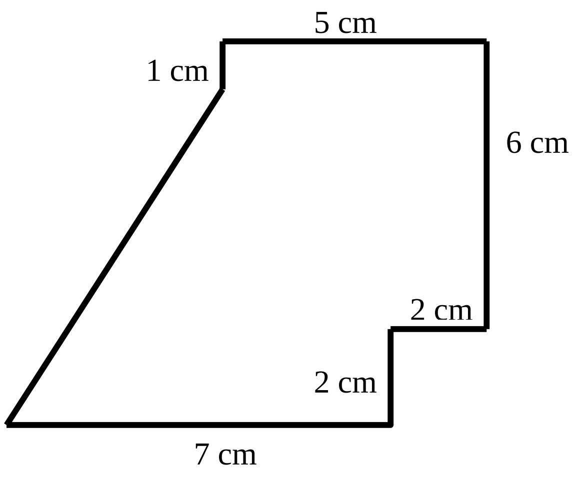
> Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:
>
> (1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
>
> (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
>
> (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Die Antworten könnten dann folgendermaßen lauten:

Man muss es **verstanden** und erfahren haben, dass die mathematischen Gegenstände eine deduktiv geordnete Welt eigener Art bilden mit einer eigenen Sprache, die man erlernen und in der man sich mit Experten[4] verständigen kann.

Mitnehmen und **behalten** sollte man aus einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht Problemlösefähigkeiten in Form von heuristischen Fähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen. Es geht hier also auch um alltagsrelevante Denkstrategien, weniger um bestimmte Kalküle, Formeln oder Beweise. „Zerlegen und Ergänzen" kann man z.B. in der Geometrie bei der Inhaltsberechnung von Flächen und Körpern als hilfreiche alternative Strategien kennen lernen, die das eigene Strategiearsenal und damit die Beweglichkeit des Denkens erweitern, vgl. das Aufgabenbeispiel in Abb.2.

Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figur.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht!

Abb.2: Aufgabenbeispiel für alternative Lösungsstrategien: Zerlegen der Figur durch geeignete Hilfslinien oder Ergänzen zum Rechteck

[4] Zu solchen „Experten" gehören im Erwachsenenalltag Fachbücher zur beruflichen Weiterbildung, Versicherungsmakler, Autoverkäufer, Anlageberater aber auch der Taschenrechner und Computer mit einschlägiger Software.

Durch das Aufzeigen von Problemen außerhalb der Mathematik, die man auch mit diesen Strategien erfolgreich bearbeiten kann, wird die Mathematik erst dem Anspruch gerecht, dass man im Mathematikunterricht „Denken“ lernen kann! Erprobte Unterrichtsmaterialien in Verbindung mit einem betreuten Kursangebot zur Förderung eines so verstandenen Problemlösenlernens werden auf der Fortbildungsplattform proLehre bereit gestellt, erreichbar unter www.prolehre.de.

Kennen und **anwenden** können sollten die Lernenden solche Mathematisierungs-muster, mit denen sie die Erscheinungen der Welt um uns in einer spezifischen Art wahrnehmen und verstehen können. Mit der Mathematikbrille in die Welt schauen können, das heisst z.B. auch Zeitungsmeldungen und Diagramme verstehen, interpretieren und nachfragen können[5].

Wenn also der Versuch unternommen wird, z.B. für eine Jahrgangsstufe mathematische Grundlagenkompetenz zu beschreiben, wird empfohlen, sich an diesen drei zentralen Aspekten des Lernens von Mathematik zu orientieren und dabei die auszubildenden Kompetenzbereiche *Argumentieren/Kommunizieren, mathematisches Problemlösen und Modellieren* sowie *technisches Arbeiten/ Darstellungen und Werkzeuge verwenden* entsprechend zu berücksichtigen.

Beispiele für eine Inhaltsauswahl zur mathematischen Grundlagenkompetenz in verschiedenen Jahrgangsstufen bietet auch das Konzept der „Querfeldein-führerscheine“, vgl. Kap. 2.3. Einen solchen Kanon kann man jedoch nicht ein für allemal festlegen. Das, was hier aufgenommen wird, sollte in der Fachschaft jeder Schule konsensbildend diskutiert und umgesetzt werden[6].

2. Methoden zur Sicherung von Basiswissen

Im folgenden geht es weniger darum, die Erarbeitung neuen Stoffes zu beschreiben. Es wird davon ausgegangen, dass das schon geschehen ist und nun stellt sich die Frage, wie die Elemente des Basiswissens fest verankert und wach gehalten werden können, um möglichst flexibel verfügbar zu sein. Dazu sind einerseits Methoden erforderlich, die helfen, einen Überblick zu gewinnen über das, was wichtig ist und andererseits Verständnis und Anwendungsfähigkeiten der Lerninhalte unterstützen.

2.1. Mindmap als semantisches Netz zur Beschreibung der Lerninhalte und ihrer Zusammenhänge zu einem mathematischen Thema

Eine Mindmap ist zunächst eine ideale Form der Visualisierung einer stoffdidaktischen Analyse für die eigene Unterrichtsvorbereitung. Am Beispiel der Mindmap zum Thema „Zuordnungen“ in Abb.3 wird erkennbar, dass man

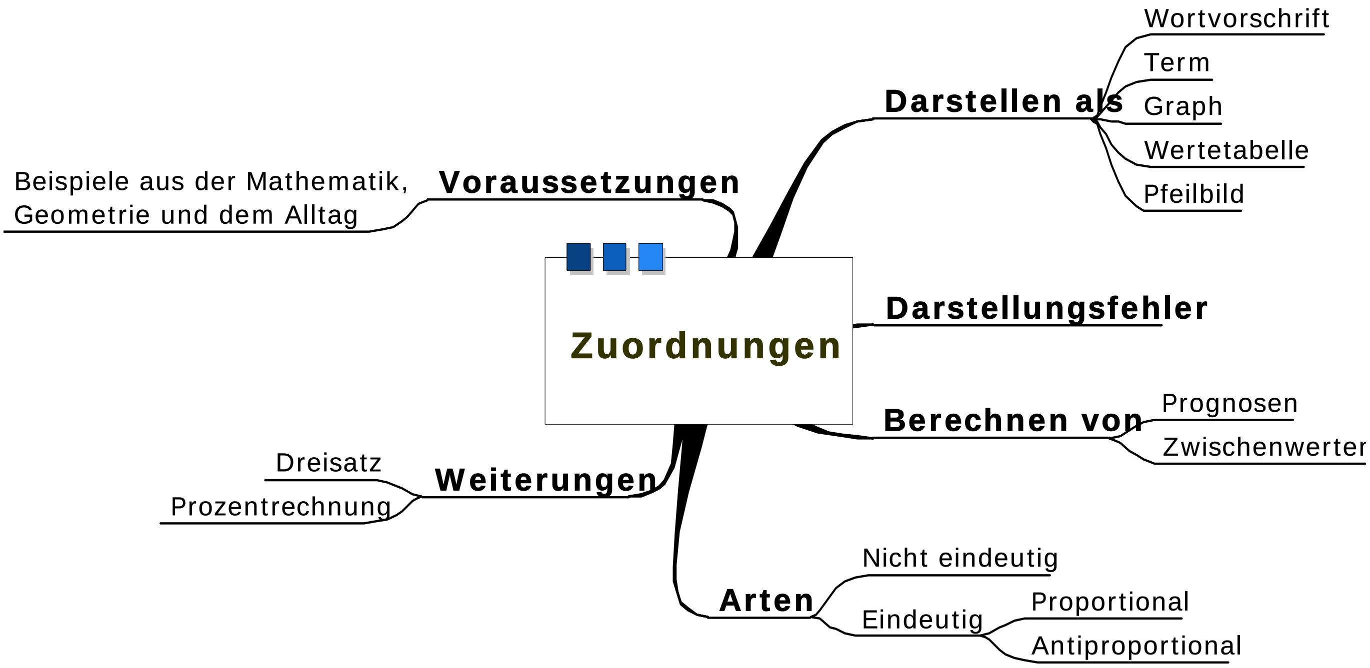
---

[5] Erprobte Beispiele bieten die ISTRON-Materialien, www.math-edu.de/Anwendungen/anwendungen.html, die MUED-Gruppe www.mued.de und ein Internetportal der TU Darmstadt www.amustud.de sowie viele weitere Publikationen in Büchern und Zeitschriften wie z.B. MNU unter www.mnu.de und in mathematik lehren mit entsprechenden Themenheften und der Rubrik „Die etwas andere Aufgabe“ oder auch das Themenheft „Modellieren bildet“ von Praxis der Mathematik in der Schule Heft3/2005.

[6] Ein entsprechendes unterstützendes Fortbildungsangebot zum Thema „Grundlagenkompetenz in Mathematik“ mit einem online-Kurs gibt es ab September 2006 unter www.prolehre.de.

unterschiedliche Zugänge zum Thema wählen und die Schwerpunkte auch im Einklang mit den curricularen Pflichtvorgaben verschieden setzen kann. So erscheint es sinnvoll, bei dem einen Thema mehr Aspekte zu bearbeiten, als die Rahmenpläne bzw. die Bildungsstandards explizit vorschreiben, um sich bei einem anderen Thema aus Zeitgründen auf das „Pflichtpensum" zu beschränken. Mindmaps bieten eine fundierte Grundlage für bewusste Akzentsetzungen dieser Art.

Abb.3 Semantisches Netz (Mindmap) zum Thema „Zuordnungen"



Mindmaps können, wenn sie mit den Schülern gemeinsam entwickelt werden, für verschiedene Systematisierungsaspekte im Unterricht sehr hilfreich sein, um Vernetzungen der neuen Stoffelemente und Vorgehensweisen mit dem bereits Bekannten zu veranschaulichen. Dabei werden dann auch leicht die Schwerpunkte erkennbar, die Gegenstand einer Lernkontrolle in Form eines Tests oder einer Präsentationsprüfung sein werden[7].

Im Zentrum der Entwicklung einer Mindmap aus Lehrersicht stehen themenspezifische Antworten auf folgende Fragen:

- Welche Zugänge gibt es zum Thema (historisch, anwendungsorientiert), gibt es Oberbegriffe zum neuen Lerngegenstand?
- Welches Vorwissen, welche Voraussetzungen werden benötigt?
- Welche Begriffe werden gebildet?

[7] Weitere Beispiele für den Einsatz und die Anlage von Mindmaps mit unterschiedlichen Blickwinkeln zum Systematisieren vgl. unter www.prolehre.de.

- Welche Arten von Objekten werden in dem neuen Thema unterschieden – gibt es Sonderfälle?
- Was soll dargestellt/visualisiert werden können?
- Was soll berechnet und begründet werden können?
- Was sind die typischen Anwendungen?
- Welche Weiterungen und weiterführenden Fragestellungen gibt es?

.2.2. Mathematische Grundlagenkompetenz entwickeln mit einem „Lernprotokoll“

Ein „Lernprotokoll“ im Mathematikunterricht (Bruder 2001) kann drei verschiedene Intentionen haben und unterscheidet sich von einem Lerntagebuch dadurch, dass es nur eine einmalige Momentaufnahme zum aktuellen Lernstand nach den ersten Unterrichtsstunden zu einem neuen Thema ermöglicht. Es bietet:

1. Eine Orientierungshilfe für das, was wichtig ist (Was muss ich kennen – was muss ich können?) bereits nach den ersten Einführungsstunden.
2. Eine Chance sich zu vergewissern über den eigenen Lernstand (Was kann ich schon? Wo sind noch Lücken? Was habe ich noch nicht verstanden?) – ohne Bewertungsdruck!
3. Eine Sicherung des Ausgangsniveaus für den Einstieg in komplexe Übungen und Anwendungen zu dem neuen Thema durch eine erste elementare Vernetzung (Wo und wie können wir die neuen mathematischen Werkzeuge anwenden? Wo gibt es Fehlerquellen ?)

<u>*Beispiel für ein Lernprotokoll (Klasse 9):*</u>

1. Wie kann man die Länge einer unzugänglichen Strecke bestimmen, wenn ein Maßband und ein Winkelmessgerät zur Verfügung stehen? Erläutere ein mögliches Vorgehen!

2a) Zeichne eine „Strahlensatzfigur“, beschrifte sie sinnvoll und stelle zwei passende Gleichungen auf!

2b) Zeichne und beschrifte eine Strahlensatzfigur, für die folgendes gilt:

$x : 20 = (x + 40) : 28$

3. Welche Fehler können passieren, wenn man Strahlensätze für Berechnungen anwendet?

4. Wann kann man Strahlensätze anwenden und wann nicht? Gib jeweils ein Beispiel an!

Wenn man ein solches Lernprotokoll zum Beginn einer Unterrichtsstunde z.B. auch als Ersatz für eine klassische Hausaufgabenkontrolle einsetzt, nachdem die ersten drei oder vier Stunden zum neuen Thema absolviert wurden, können alle drei oben genannten Intentionen erfasst werden. Diese Methode eignet sich aber auch als Abschluss z.B. einer Doppelstunde zur Reflexion des Gelernten.
Wichtige Argumente für diese Unterrichtsmethode sind:

- Alle Lernenden müssen sich mit den Fragen auseinander setzen und müssen ihre Gedanken verbalisieren (schriftlich fixieren). Das ist ein wichtiger Meilenstein zu mehr Ziel- und Inhaltsklarheit und Sicherheit in den Vorstellungen und Grundfertigkeiten.
- Für Lernende und Lehrende werden Verständnisprobleme in einer Lernphase deutlich, in der noch „Reparaturen" möglich sind. Werden diese Defizite erst anlässlich eines Tests anerkannt, ist es dafür bereits zu spät (eine Note wird erteilt).

Im Folgenden werden ein *mögliches Vorgehen* zum Umgang mit dem Lernprotokoll und die Art der eingesetzten Aufgabenstellungen allgemeiner beschrieben, um sie auf andere Themen übertragen zu können:

- <u>Alle</u> Schüler/innen beantworten die gestellten Fragen schriftlich und für sich allein. Es erfolgt keine Bewertung, aber die Ergebnisse werden verglichen mit einer verbalen Rückmeldung der Lehrkraft. Wird diese Methode, die auch dazu dient, den Lernenden mehr Verantwortung für ihr eigenes Lernen zu übertragen, erstmals in einer Klasse eingesetzt, wird empfohlen, die Arbeitsergebnisse der Schüler/innen einzusammeln und individuelle Hinweise zur Verbesserung des Lernstandes zu geben. Dieser einmalige Aufwand in einer Unterrichtsreihe zahlt sich langfristig aus. Später genügen Vergleiche mit einer vorbereiteten Folie oder die Vorstellung einer Musterlösung.

- Folgende typische Fragestellungen sind besonders geeignet für ein Lernprotokoll, da sie Lernanlässe schaffen für Reflexionen auf einer Metaebene, die entscheidend das Verständnis fördern helfen:

    - ***Das Einstiegsbeispiel der Unterrichtsreihe in Worten beschreiben (Worum geht es?)***
    - ***Eine Grundaufgabe und ihre Umkehrung formulieren und lösen (Identifizierungs- und Realisierungshandlungen ausführen zur Verständnisförderung)***
    - ***Wo kann man das neue Verfahren/den Satz/Begriff anwenden und wo nicht? (Sinn- und Sachbezig herstellen)***
    - ***Welche typischen Fehler können auftreten?***

Die folgenden einfachen Beispiele sollen den besonderen Charakter der Lernprotokollaufgaben noch einmal herausstellen. Es handelt sich hier um Aufgaben, die in der Regel nur einmal in einer Unterrichtsreihe vorkommen sollten – nicht öfter. Aber ihr frühestmöglicher Einsatz erlaubt sogar Einsparungen beim Stellen vieler gleichartiger Aufgaben, sogenannter „Päckchen", in den folgenden Übungsphasen. Wenn ein gewisses Grundverständnis in dem neuen Themenfeld vorliegt, ist der Boden für eine erste Reflexion bereitet, die neue, tiefere Klarheit bringt. Der ohnehin zweifelhaften Methode eines Lösens von möglichst vielen gleichartigen Aufgaben in der Hoffnung, dass sich dann irgendwann schon die nötigen Lerneffekte einstellen werden, ist das Lernprotokoll weit überlegen und kostet sogar nur wenig Zeit.

Beispiele für Verständnis fördernde Aufgabenpaare in Form einer Grundaufgabe und einer ihrer Umkehrungen sind:

Diagramm aufstellen, Diagramm interpretieren;
Brüche multiplizieren, dividieren;

Das Volumen eines Elementarkörpers berechnen, Volumen vorgeben und Maße suchen;
Eine quadratische Gleichung lösen und eine aufstellen, die bestimmte Lösungen hat.

Fragen nach Anwendungsmöglichkeiten und Gegenbeispiel sind von gravierender verständnisfördernder Bedeutung und unterstützen eine flexible Anwendungsfähigkeit:

- *Wann kann man das Rechengesetz zum Potenzieren von Potenzen anwenden und wann nicht?*
- *Gib einen Term an, den man mit Hilfe der 3.binomischen Formel vereinfachen kann und einen, bei dem das nicht geht.*
- *Gib einen Zusammenhang an, den man mathematisch in der Form a : b = c beschreiben kann und einen, bei dem das nicht möglich ist.*

2.3. Vermischte Kopfübungen – was ist das, warum sind sie wichtig und wie kann man sie gestalten?

Kopfübungen wurden bereits im 1.Kapitel angesprochen. Aber von einem Testangebot alleine ergeben sich in der Regel keine nachhaltigen Lernzuwächse. Hier soll es darum gehen, Wege aufzuzeigen, wie elementare Grundlagen vor dem Vergessen bewahrt und flexibler anwendbar werden können.

Ein Beispiel für eine Kopfübung etwa ab Klasse 8:

1. *Löse die Gleichung im Kopf: $3x - 5 = 1$*
2. *Löse die Klammer auf: $2(a - 3b)^2 =$*
3. *Gib 3 verschiedene Maßpaare an für ein Rechteck mit $30cm^2$ Flächeninhalt.*
4. *Gib einen Überschlag an für den Umfang eines Kreises mit 15cm Durchmesser.*
5. *Schreibe einen Term: Das Dreifache einer um 5 verminderten Zahl!*
6. *Notiere die Koordinaten eines beliebigen Punktes im dritten Quadranten des Koordinatensystems!*
7. *Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem Umfangswinkel und dem zugehörigen Mittelpunktswinkel im Kreis?*
8. *Auf einer Karte im Maßstab 1: 200000 werden 4cm zwischen zwei Orten gemessen. Wie groß ist die reale Entfernung?*
9. *Löse die Formel für die Bewegungsenergie nach der Geschwindigkeit v auf!* $E_{kin} = m/2 \cdot v^2$
10. *Eine Bank bietet zur Zeit eine Geldanlagemöglichkeit ab 5000€ zu 4% Zinsen an. Wie hoch wären die Zinsen am Jahresende, wenn ich zum 1. des nächsten Monats 6000 € einzahlen würde?*

Vermischte Kopfübungen
- sind eine rituelle **Lerngelegenheit für das Wachhalten von mathematischem Grundwissen** aus früheren Themen und Klassenstufen.
- enthalten jeweils Grundaufgaben bzw. deren Umkehrungen zu verschiedenen nicht zum aktuellen Stoff gehörenden Begriffen, Verfahren oder Zusammenhängen, die dauerhaft verfügbar sein sollen.

- sind Teil einer Selbsteinschätzung der Lernenden mit dem Ziel, Aktivitäten zum Füllen individueller Lücken anzuregen.

Mit regelmäßiger Wiederholung grundlegender Wissensbausteine kann dem Vergessen entgegen gewirkt werden und die Lernenden verfügen langfristig über ein solides Fundament, um auch anspruchsvolle Aufgaben erfolgreich mathematisch bearbeiten zu können.
Auch die Zufriedenheit der Lernenden mit ihrer mathematischen Kompetenz kann spürbar zunehmen.
Aus langjährigen praktischen Erfahrungen wird folgendes **Vorgehen** empfohlen:

- In Klasse 5 bis 8 möglichst einmal pro Woche an einem bestimmten Wochentag zum Stundenbeginn die vermischten Kopfübungen über maximal 10 Minuten einsetzen (auch geeignet zur Konzentrationsförderung und Aufmerksamkeitsfokussierung in Mittagsrandstunden). In den höheren Klassenstufen genügt ein vierzehntägiger Rhythmus.

- Die Regelmäßigkeit ist eine notwendige Voraussetzung für spürbare Erfolge.

- Es werden ca. 5 bis 10 Aufgaben zur eigenständigen Bearbeitung gestellt[8].

- Die Aufgaben, die aus verschiedenen Grundanforderungen möglichst unabhängig vom aktuellen Unterrichtsthema gemixt werden, können auf einer Folie mit verdeckten Lösungen vorgestellt oder auch nacheinander mündlich gestellt und kurz an der Tafel angeschrieben werden. Die Schüler notieren sofort (nur) ihre Lösung auf einer Karteikarte (A4), dann wird die nächste Aufgabe gestellt oder aufgedeckt.

- Die Karteikarte kann eingesammelt und zur nächsten Kopfübung wieder ausgeteilt werden. Die Zahl der richtigen Lösungen wird von jedem Lernenden festgehalten mit dem Ziel, langfristig Verbesserungen zu erreichen. Damit das möglich wird, sollten gesonderte Lernangebote über Arbeitsblätter, Lernsoftware oder auch das Internet zum individuellen Üben bereit gestellt werden. Diese Materialien werden selbständig zu Hause bearbeitet oder z.B. auch im Nachmittagsbetreuungsangebot an der Schule.

- Ein Vergleich der Lösungen kann z.B. selbständig erfolgen nach Aufdecken der Ergebnisse auf der Overhead-Folie, durch Anschreiben der Lösungen auf Zuruf an der Tafel, durch Einklappen einer Tafel, wenn ein Schüler seine Aufgaben hinter einer Klapptafel verdeckt notiert hat o.ä.

- Es empfiehlt sich eine kurze Abfrage, bei welcher Aufgabe hohe Fehlerquoten in der Klasse auftraten, um den mathematischen Hintergrund ggf. noch einmal für alle Schüler zu erläutern.

- Von regelmäßigen Benotungen der Kopfübungen wird abgeraten, um den Charakter einer Lerngelegenheit mit Diagnosecharakter zu unterstreichen und

[8] Musterbeispiele für verschiedene Klassenstufen bis hin zur Oberstufe enthält die Aufgabendatenbank www.madaba.de. Anregungen bieten auch Materialien verschiedener Verlage, z.B. die Hefte „Meine täglichen Übungen in Mathematik“ für Klasse 5/6, 7/8 und 9/10 vom peatec-Verlag.

die Lernenden daran zu gewöhnen, mehr Verantwortung für ihr eigenes Lernen zu übernehmen, indem sie angehalten werden, ohne unmittelbaren Bewertungsdruck individuell nachzulernen und ihre Wissenslücken zu schließen.

- Um einem Erlahmen des Interesses der Lernenden entgegen zu wirken und die Ernsthaftigkeit der Bearbeitung der Kopfübungen zu unterstützen, hat sich ein so genannter **Mathe-Führerschein** in Form eines Querfeldeinführer-scheins bewährt, der halbjährlich oder zumindest einmal im Schuljahr in Form eines benoteten Tests über mindestens 30min (integrierbar in die mündliche Note) geschrieben wird. Ein solcher „Grundlagenverfügbarkeitstest" umfasst dann alle Begriffe, Verfahren und Zusammenhänge, die bis dahin Gegenstand der Kopfübungen waren.

- Es empfiehlt sich, zu Beginn des Schuljahres einen Plan anzufertigen, welche Themen in den Kopfübungen jeweils vorkommen sollen, damit alles Wesentliche abgedeckt und regelmäßig wieder aufgegriffen wird (etwa alle 6 Wochen sollte ein Thema wieder kehren). Auf diese Weise können auch rechtzeitig vor der Behandlung eines neuen Themas die dazu erforderlichen Grundlagen wiederholt werden.

- Wenn Schüler aufgefordert werden, selbst solche Kopfübungen zusammen zu stellen (die Themen sollten vorgegeben werden), entsteht ein zusätzlicher Lerneffekt und die Akzeptanz und Bereitschaft, diese Aufgaben zu bearbeiten, kann deutlich gesteigert werden.

- Wenn zu Beginn eines Schuljahres mit Übernahme einer neuen Klasse ein Matheführerschein (ohne Bewertung) geschrieben wird, ergeben sich wertvolle Hinweise auf die Themen, die in den Kopfübungen vorkommen sollten, verbunden mit individuellen Übungsangeboten, siehe oben.

Es geht hier also durchaus auch um einfache Kontextbezüge und nicht nur um ein formales Reproduzieren möglicherweise auswendig gelernter Fakten oder Regeln. Damit können diese vermischten Kopfübungen wesentlich zu einer mathematischen Grundlagenkompetenz beitragen, wie aktuelle empirische Untersuchungen im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Bildungsqualität Schule" (BIQUA) zeigen, vgl. Komorek/Collet/Bruder/Schmitz 2006.

3. Umgehen mit Heterogenität

Umgehen mit Heterogenität im Unterrichtsalltag ist eine überaus vielschichtige und keineswegs immer nur als schwierig und problembeladen anzusehende Aufgabe für die Lehrkräfte aller Schulformen. Unterschiedliche Denk- und Arbeitsweisen und verschiedene kulturelle Hintergründe der Lernenden können sich durchaus auch gegenseitig bereichern und den eigenen Horizont erweitern, vgl. Groeben 2003.

Weshalb die Frage nach dem Umgehen mit Heterogenität als ein Modul für die Arbeit im SINUS-Projekt aufgenommen wurde, ist jedoch der Anspruch, allen Lernenden einen Entwicklungsfortschritt im Mathematikunterricht zu ermöglichen. Das ist bislang keineswegs selbstverständlich.

Im Folgenden werden einige pragmatische Ansätze diskutiert, wie die Lernenden jeweils im Mathematikunterricht dort abgeholt werden können, wo sie in ihrer aktuellen Persönlichkeitsentwicklung stehen, um jeweils die Zone der nächsten Entwicklung in Angriff zu nehmen (Wygotski).

3.1. Arbeiten mit Wahlaufgaben

Schüler lernen eigenverantwortlich(er) und sind langfristig erfolgreich mit Hilfe von *Wahlaufgaben* und mit klaren Zielvereinbarungen. Dazu soll die Methode der **Einstiegswahl in einem schwierigkeitsgestuften Aufgabenangebot** vorgestellt werden.

Dem unterschiedlichen Festigungsbedarf der Lernenden kann man besser Rechnung tragen, wenn erste Übungen zum neuen Stoff nicht im Gleichtakt für alle laufen, sondern wenn eine Folge von z.B. 10 anforderungsgestuften Aufgaben zum produktiven Üben gestellt wird, von denen in einer gegebenen Zeit aber nur mindestens 5 gelöste Aufgaben erwartet werden. Lernschwache Schüler/innen werden angehalten, mit den einfacheren Aufgaben zu beginnen, mit denen sie erfolgreich sind, um sich von dort aus schrittweise zu steigern und leistungsstärkere Schüler/innen werden aufgefordert, bereits mit schwierigeren Aufgaben einzusteigen und ggf. auch mehr als die geforderte Mindestzahl zu versuchen. Diese Methode eignet sich auch sehr gut für Hausaufgaben und lässt sich sogar bei solch komplexen Lerninhalten wie heuristischen Hilfsmitteln und Strategien anwenden, wie das folgende Beispiel zeigt:

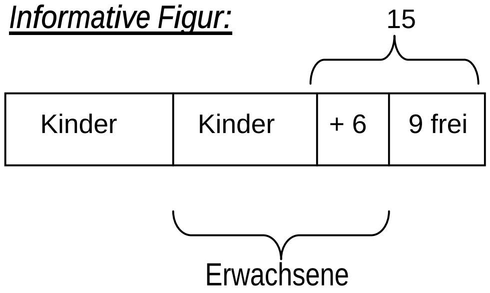
Im Unterricht wurden anhand einer Musteraufgabe verschiedene Lösungswege zusammen getragen, wie man „Anteilsaufgaben“ erfolgreich bearbeiten kann.

> *<u>Musteraufgabe (Rätsel):</u> In einem Bus ist ein Drittel der Plätze von Kindern besetzt, 6 Plätze mehr werden von Erwachsenen besetzt und 9 Plätze bleiben frei.*

Verschiedene Lösungswege werden gesammelt und die Ideen und Fehler diskutiert, alternative Ideen werden vorgestellt. Abb. 4 zeigt einige Schülerlösungen.

Dabei wurden die heuristischen Hilfsmittel „Informative Figur“und „Tabelle“ als Alternative zur Gleichung vorgestellt. Mögliche Lösungswege (exemplarisch):

<u>Informative Figur:</u>

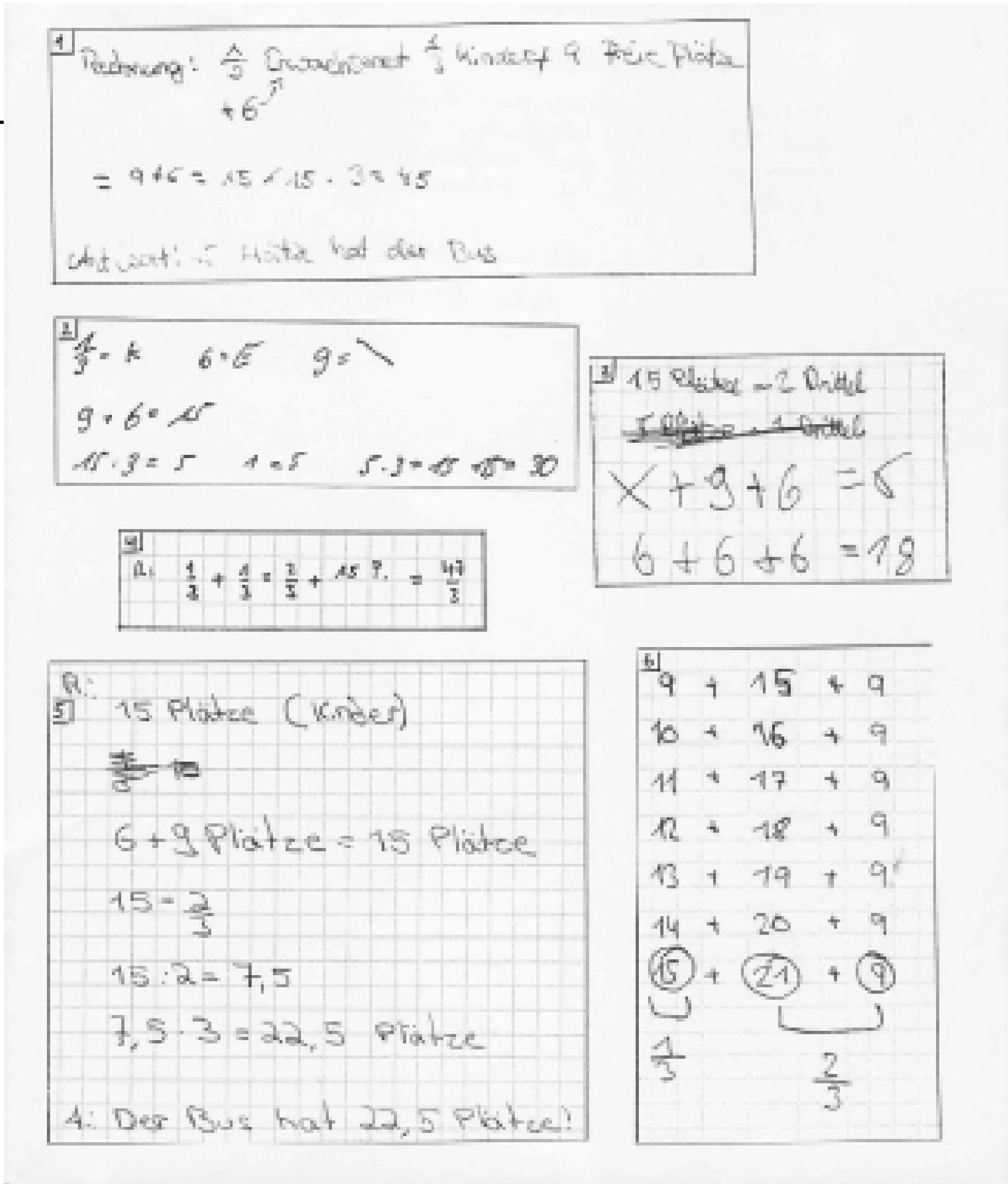


15 entspricht einem Drittel, also hat der Bus 45 Plätze.

Tabelle zum systematischen Probieren:

	1. Versuch	2. Versuch	3. Versuch	4. Versuch
Gesamtzahl raten	30	60	45	
Kinder	10	20	15	
Erwachsene	16	26	21	
Frei	9	9	9	
Gesamt?	35	45	45	
	zu wenig	zu viel	stimmt	

Abb.4 Schülerlösungen zur Busplätzeaufgabe



Anhand einer ähnlichen Aufgabe wurden die jeweils individuell neuen Lösungswege dann erstmals ausprobiert.

> <u>*Ähnliche Aufgabe:*</u> *Claudia nimmt die Hälfte der Murmeln aus ihrem Sack und behält sie für sich. Dann gibt sie zwei Drittel der Murmeln, die noch im Sack waren, Peter. Sie hatte jetzt sechs Murmeln übrig. Wie viele Murmeln waren am Anfang im Sack gewesen?*

Jetzt geht es um eine Festigung der kennen gelernten heuristischen Hilfsmittel mit einer schrittweisen Kontexterweiterung. Dazu werden den Lernenden auf einem Arbeitsblatt folgende Aufgaben mit Schwierigkeitsmarkierung angeboten (*, **, ***,****). Die Aufgabe an alle Schüler lautet, dass von den vorgestellten sechs Aufgaben mindestens drei bearbeitet werden sollen und zwar aus mindestens zwei verschiedenen Schwierigkeitsbereichen. Der Ergebnisvergleich kann anhand eines vorbereiteten Lösungsblattes individuell je nach Arbeitstempo erfolgen. Die Wahl des Lösungsweges wird frei gestellt. Die Bearbeitung dieser Aufgaben eignet sich auch als Hausaufgabe und bietet ein breites Differenzierungsspektrum.

(*) Kinderalter:
Zwei Kinder, von denen eines doppelt so alt ist wie das andere, sind zusammen 21 Jahre alt. Wie alt sind sie?

(*) Keks-Aufgabe:
Alexa und Gerd bekommen zusammen insgesamt 26 Kekse geschenkt. Zwei essen sie sofort auf, den Rest wollen sie teilen. Alexa soll doppelt so viele bekommen wie Gerd, weil sie lange krank war. Wie viele Kekse bekommt jeder?

(**) Reisebus-Aufgabe:
Ein Reisebus hat eine 800 km lange Strecke in zwei Tagen zurückgelegt. Am zweiten Tag fährt der Bus 70 km mehr als am ersten Tag. Wie viele km ist der Bus am ersten Tag, wie viele km am zweiten Tag gefahren?

(**) Kerzen-Aufgabe:
Es brennen zwei Kerzen von ungleicher Länge und verschiedener Stärke. Die längere brennt in 31/2 Stunden herunter, die kürzere in 5 Stunden. Nach 2 Stunden Brenndauer haben die Kerzen die gleiche Länge. Wie viel war die eine anfangs kürzer als die andere?

(***) Oma-Alter:
Eine Mutter sagt zu ihrer Tochter: „Als ich geboren wurde, war Oma 21 Jahre alt. Als du geboren wurdest, war ich 21 Jahre alt und heute sind wir beide zusammen gerade 21 Jahre älter als Oma.“ Wie alt sind Tochter, Mutter und Oma?

(****) Zug-Aufgabe:
Eine Brücke von 480 m Länge wird von einem Zug in 90 Sekunden überquert. Die Vorbeifahrt an einem Pfeiler dauert 40 Sekunden. Wie lang ist der Zug?

Für die Lehrkräfte sind je nach Lernklima in der Klasse bei dieser Methode unterschiedliche erzieherische Aufgaben zu bewältigen: Entmutigte Lernende benötigen ehrlich erworbene und akzeptierte Erfolgserlebnisse, leistungsstärkere aber wenig anstrengungsbereite Lernende benötigen Ansporn, Herausforderung und die beglückende Erfahrung des Erfolgs nach einer größeren geistigen Anstrengung.

Für die Rückmeldung der jeweils erzielten sehr unterschiedlichen Lernergebnisse sollten die drei folgenden Bezugsnormen nach Rheinberg/Krug 1999 unterschieden und berücksichtigt werden:

- Individuelle Bezugsnorm: Welche spezifische Entwicklung hat die einzelne Schülerin, der einzelne Schüler genommen z.B. im Vergleich zur vorangegangenen Hausaufgabe oder Klassenarbeit? Hierfür bieten sich verbale Beurteilungen an, Noten sind weniger aussagekräftig und oft nicht fein genug justiert für individuelle Lernfortschritte.
- Soziale Bezugsnorm: Hier wird der Entwicklungsstand bzw. Lernfortschritt einzelner Schüler im Vergleich zur Lerngruppe insgesamt ausgedrückt. Diese Einschätzung kann die Beurteilung mit der individuellen Bezugsnorm nicht ersetzen, wohl aber wertvoll relativierend ergänzen.
- Sachliche Bezugsnorm: Neben der Einschätzung der individuellen Entwicklung im Kontext des Entwicklungsstandes der Lerngruppe insgesamt wird mit den Bildungsstandards jetzt eine Messlatte von außen angelegt, die helfen kann, auch das Lerngruppenergebnis noch zu relativieren und einzuordnen.

Es ist zu beobachten, dass bei der Arbeit mit Wahlangeboten die Schere zwischen leistungsstarken und lernschwachen Schülern immer weiter auseinander gehen kann. Das sollte jedoch in Kauf genommen werden, wenn alle Leistungsgruppen beachtliche individuelle Lernfortschritte erzielen.

3.2. Niedrigschwellige Einstiege mit offenem Ende – das „Blütenmodell“

Im sogenannten „Blütenmodell“ für offene Aufgaben wird die im vorigen Abschnitt anhand mehrerer verschiedener Aufgaben angelegte Differenzierungsidee innerhalb einer einzigen Aufgabe zusammen geführt, die aus mehreren anforderungsgestuften Teilaufgaben besteht, vgl. dazu auch Modul1, Abschnitt 2.3.

Weitere praktische Empfehlungen zu einem differenzierenden Mathematikunterricht bietet Krippner 1992. Zur Aufgabenvariation bietet u.a auch Schupp 2003 wertvolle Anregungen.

3.3. Verschiedene Niveaus des Mathematikverständnisses

Zur Unterstützung der diagnostischen Tätigkeit der Lehrkräfte ist es hilfreich, sich an praktikablen Strukturierungen, leicht verständlichen und übertragbaren Aspekten des Verstehens von Mathematik zu orientieren. Dazu werden im folgenden zwei Vorschläge unterbreitet.

Bruner 1974 unterscheidet zwischen der enaktiven, ikonischen und symbolischen Erkenntnisebene.

Beispiel: *Wenn man von einem ausgeschnittenen Papierdreieck die drei Ecken abreißt und aneinander legt, ist die Vermutung naheliegend, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° betragen könnte.*

Ähnlich ist die Situation, wenn man durch Körperdrehung die drei Winkel eines auf den Boden gemalten Dreiecks addiert. In beiden Fällen handelt es sich um eine Art Muskelerinnerung. Die Innenwinkelsumme von 180° wird plausibel und hinterlässt Erinnerungsspuren im Kopf. Ein mathematischer Beweis ist das jedoch nicht. Ein Lernender, der auf dieser Erkenntnisebene verbleibt, kennt die Innenwinkelsumme im Dreieck, kann aber keine mathematische Begründung für seine Gültigkeit liefern.

Die ikonische Ebene wird z.B. erreicht, wenn man sich ein Dreieck aufzeichnet, einen Innenwinkel fest hält und an der gegenüberliegenden Dreiecksseite wackelt. Dann kann man durch das Bild gestützt erkennen, dass die Innenwinkelsumme vermutlich konstant ist. Wie groß könnte sie sein? Nachmessen führt zu einer Vermutung. Auch das ist noch kein mathematischer Beweis, aber der kognitive Anspruch dieser Ebene ist deutlich höher als der auf der enaktiven Ebene. Lernende, die diese Erkenntnisebene erreichen und nachvollziehen können, sind in der Lage, intuitive Begründungen zu geben und einen gegebenen Sachverhalt in einem bestimmten Kontext (bildlich) zu interpretieren.

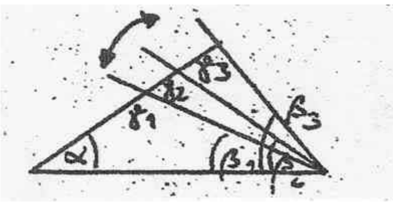


Abb.5 Vermutung der Konstanz der Innenwinkelsumme im Dreieck

Die symbolische Ebene wird erreicht, wenn nach mathematischen Beweismitteln gesucht wird, um zu zeigen, dass die Innenwinkelsumme in jedem ebenen Dreieck tatsächlich 180° betragen muss. Hierzu wird meist auf Winkelsätze an geschnittenen Parallelen zurückgegriffen (Wechselwinkel). Eine entsprechende Hilfslinie muss eingezeichnet werden und mit geeigneten Bezeichnungen wird eine logische Schlusskette entwickelt. Kann ein Schüler diesen Beweisgang nachvollziehen, hat er das anspruchsvollste Argumentationsniveau erreicht.

Diese drei Erkenntnisebenen sagen jedoch noch nichts aus über die Übertragbarkeit der Vorstellungen und eingesetzten Methoden, mit der letztlich erst eine bestimmte Handlungskompetenz identifiziert werden kann. Deshalb wird empfohlen, zusätzlich zu den Erkenntnisebenen noch die *Qualität der Handlungsorientierung* zu unterscheiden.

Vor dem Hintergrund einer weit ausgearbeiteten Tätigkeitstheorie (Lompscher 2004) lassen sich ganz grob etwa drei Typen oder Qualitäten von Handlungsorientierungen bei Lernenden unterscheiden:

1. **<u>Probierorientierung</u>**

Beispiel: *Ein Schüler versucht durch Annahme von Apfel-Zahlen (100, 200...) die folgende historische Knobelaufgabe (intuitiv) zu lösen – und scheitert:*

„7-Tore-Aufgabe“[9]

Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um mit seiner Ernte in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht ein Wächter und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig. Wie viele hatte er am Anfang?

Bei der Probierorientierung handelt es sich um eine unvollständige Orientierungsgrundlage, die nur Vorstellungen von Handlung und Ergebnis enthält; es ist ein Handeln nach Versuch-Irrtum; keine Strategie- oder Verfahrensreflexion, spezifische Verfahrenskenntnisse werden nicht ausgebildet. Man kann mit dieser Strategie durchaus Erfolg haben, es kostet jedoch meist viel Zeit.
Im praktischen Leben wird dieses Vorgehen häufig angewendet. Warum eine lange Bedienungsanleitung lesen, wenn man es doch auch so hinbekommt, den Anrufbeantworter zu programmieren! Von Schülern wird diese Methode auch oft im Unterricht gewählt, obwohl teils bessere, theoretisch fundierte Orientierungsgrundlagen bekannt sein müssten. Doch wenn diese Orientierungsgrundlagen nicht in variierenden Kontexten vom Schüler aus seinem Gedächtnis abgerufen werden können, wurden sie nicht vollständig ausgebildet. Es fehlt dann das Vermögen (und mitunter auch die Bereitschaft) zum Wiedererkennen von (eigentlich) Bekanntem.

2. Musterorientierung

Es liegt eine vollständige Orientierungsgrundlage für ein abgegrenztes Gebiet durch Beispiellösungen vor. Detaillierte, nicht verallgemeinerte Angaben zum Sachgebiet bzw. zu den Handlungsbedingungen schränken eine Übertragung von Kenntnissen ein. Analoge Aufgaben zum Musterbeispiel können selbständig bearbeitet werden, aber die Handlungen erfolgen ohne ausreichende Einsichten in komplexere Zusammenhänge.

Beispiel: *Unser Schüler hat anhand der „7-Tore-Aufgabe“ die Strategie des Rückwärtsarbeitens kennengelernt. Jetzt löst er eine folgende Aufgabe, in der es z.B. um Tuchballen geht, erfolgreich nach dem gleichen Muster – also „rückwärts“. Diese Aufgabe unterscheidet sich jedoch nur unwesentlich von der Musteraufgabe:*

Eine Übertragung der neuen Strategie auf folgendes Beispiel gelingt ihm nicht, weil er die Grundidee der Strategie noch nicht erfasst hat und sich z.B. nur an sachbezogenen Gemeinsamkeiten der bisherigen Aufgaben orientiert.

Beispiel: *Bonbons sollen in einer besonders auffälligen pyramidenförmigen durchsichtigen Kunststoffform verpackt werden. 200g dieser Bonbons nehmen etwa einen Raum von 400cm³ ein. Welche Maße könnte eine Pyramidenform erhalten, die 200g Bonbons fasst?*

3. Feldorientierung

Es wurde eine vollständige allgemeine Orientierungsgrundlage für einen Wissensbereich oder ein Themenfeld entwickelt, der Einsatz von mathematischen Verfahren wird reflektiert und es besteht eine hohe Übertragbarkeit der auf dieser

[9] Die recht hohe Schwierigkeit dieser Aufgabe kann für den Haupt- und Realschulbereich deutlich reduziert werden, ohne das Lernpotenzial zu verringern, indem man statt 7 Toren nur drei oder vier Tore einbaut. Entscheiden ist, dass die Strategie des Rückwärtsarbeitens als nützlich erkannt und erlernt wird.

Basis angeeigneten Kenntnisse und Handlungen. Die Lernenden auf diesem Orientierungslevel sind in der Lage, selbst Beispiele vom Typ „Musterorientierung“ zu generieren, d.h., sie erfinden selbst Aufgaben zur Erläuterung eines Begriffs oder einer Strategie. Die Bonbonaufgabe können Schüler mit Feldorientierung zur Strategie Rückwärtsarbeiten lösen, wenn sie in der Lage sind, kontextunabhängig die Kernfragen dieser Strategie zu stellen: *Was müsste ich kennen, um das Gewünschte bestimmen oder folgern zu können?*

Jetzt ist es möglich, schriftliche Arbeitsprodukte von Schülern und Schüleräußerungen nach der Orientierungsqualität zu beurteilen und parallel festzustellen, auf welcher Erkenntnisebene agiert wurde bzw. wo die jeweiligen Vorstellungen angesiedelt sind. Bekannte Beispiele zu Verstehensaspekten aus der Literatur, z.B. Vollrath 2001, lassen sich entsprechend aufgliedern:

Lernende haben einen Begriff auf niedrigster Orientierungsstufe verstanden, wenn sie die Bezeichnung und den Begriffsumfang intuitiv kennen. Sie sind also z.B. in der Lage, bei eindeutig vorgegebenen Körpermodellen zu entscheiden, ob es sich um ein Prisma, eine Pyramide usw. handelt. Eine reflektierte Begründung mit den definierenden Merkmalen kann jedoch nicht formuliert werden.
Können die Schüler jedoch aus dem Kopf Beispiele angeben (für ein Tetraeder) und begründen, warum es sich um ein Beispiel für diesen Begriff handelt, ist eine Musterorientierung erreicht.
Erst wenn charakteristische Eigenschaften eines Begriffs auch beispielunabhängig genannt werden können und eine Einordnung von Ober-, Unter- und Nachbarbegriffen erfolgt, handelt es sich um eine Feldorientierung.
Auf dieser Grundlage sind Schüler schließlich in der Lage zu erläutern, warum etwas nicht unter den bestimmten Begriff fällt. Analoges gilt für das Verstehen von Zusammenhängen und Verfahren.

An der Art der Erläuterungen der Schüler kann eine Präferenz für eine abstrakte (symbolische) oder eher bildliche (ikonische) Beschreibungsebene festgestellt werden.

Beispiel: *Gibt ein Schüler auf die Frage nach einer mathematischen Definition für ein Prisma an: „Tobleroneschachtel“, kann daraus entnommen werden, dass eher ikonische Vorstellungen existieren, die nicht über eine Musterorientierung hinausgehen. Ein Lernziel für diesen Schüler könnte dann darin bestehen, weitere bildhafte Beispiele für Prismen zu suchen und induktiv eine mathematische Definition durch Verallgemeinerung markanter Eigenschaften zu erarbeiten. In diesem Prozess kann das Umgehen mit mathematischer Fachsprache schrittweise gelernt werden (symbolische Ebene) und durch eine Präzisierung des Begriffsumfangs wird die Körpervorstellung verallgemeinert in Richtung einer Feldorientierung.*

Zusammenfassung:

Ein über Kopfübungen regelmäßig wiederholtes und mit dem Lernprotokoll elementar vernetzend verstandenes mathematisches Basiswissen ist eine notwendige Voraussetzung, um uneffektive Probierorientierungen der Schüler/innen in Übungen und Anwendungen zu überwinden. Mit einer Aufgabenkultur, die eine kognitive Heterogenität in der Lerngruppe konstruktiv auffängt (Wahlaufgaben, Blütenaufgaben u.ä.), kann es gelingen, eine stabile Musterorientierung zu den in den Lehrplänen geforderten Unterrichtsthemen aufzubauen als notwendige Voraussetzung zur angestrebten Feldorientierung. Dazu reichen die hier besprochenen Instrumente zur Basiswissensicherung jedoch noch nicht aus. Sie müssen ergänzt werden durch Reflexionen zu den erzielten Resultaten, Lernwegen und eingesetzten Werkzeugen.

Literaturverzeichnis

Bruder, R. (2001): Mathematik lernen und behalten. In: Heymann, H.-W. (Hrsg.): Lernergebnisse sichern. PÄDAGOGIK 53 (2001), Heft 10, S. 15 -18

Bruner, J.S.(1974): Entwurf einer Unterrichtstheorie, Berlin

Groeben, A.v.d (2003): Lernen in heterogenen Gruppen. Chance und Herausforderung. In: Pädagogik 9/03, S.6-9

Komorek, E., Collet, C., Bruder, R., Schmitz, B.(2006): Abschlussbericht zum Projekt Darmstadt II zum Problemlösenlernen in Verbindung mit Selbstregulation. Darmstadt; www.math-learning.com

Krippner (1992): Mathematik differenziert unterrichten. Schroedel

Lompscher,J.(2004): Lernkultur Kompetenzentwicklung aus kulturhistorischer Sicht. ICHS, Berlin

Rheinberg F. und Krug, S (1999): Motivationsförderung im Schulalltag. Göttingen: Hogrefe 1999, S. 41

Schupp, H. (2003): Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. (Lernmaterialien). Franzbecker

Vollrath, H.-J.(2001): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg Berlin, S. 50ff.

Winter,H.(1996): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der GDM 61/1996, S.37-46

Anhang

1 Beispielseiten für von Schülern angelegte Wissensspeicher

2 Grundlagenkompetenz in Form von Kopfrechen- bzw. Darstellungsfertigkeiten