



Fachtag Mathematik in Erfurt, 17.08.2023

Flexibles Rechnen - mit allen Kindern von Anfang an?!

Prof. Dr. Charlotte Rechtsteiner

Geplante Inhalte

- Warm-up
- Hintergründe und Begriffsklärungen zum (flexiblen) Rechnen
- Die Schulung des Zahlenblicks als Vehikel auf dem Weg zum (flexiblen) Rechnen
 - theoretische Hintergründe
 - Beispiele
- Zusammenfassender Überblick

FLEXIBLES RECHNEN ENTWICKELN

HINTERGRÜNDE UND BEGRIFFSKLÄRUNGEN



Ebenen im Lösungsprozess

- Was ist Rechnen eigentlich?

Rückgriff auf
Basisfakten

strategische
Werkzeuge

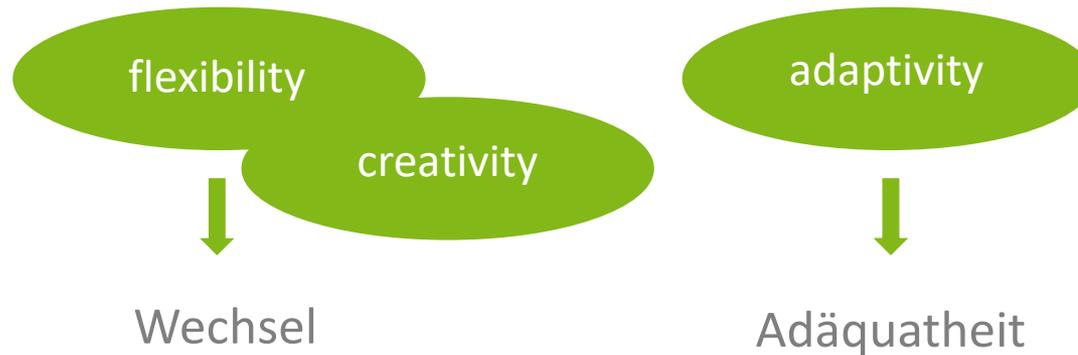
Rechnen bedeutet, eine Aufgabe so lange zu zerlegen oder zu adaptieren bis ich die Teile auswendig weiß und sie wieder zusammenfügen kann.

- ⦿ Automatisierte Basisfakten beim kleinen $1+1$ und 1×1 (sowie entsprechend in der Subtraktion/ Division)
- ⦿ kleinste Werkzeuge, mit Hilfe derer Lösungswege gebaut werden können
- ⦿ flexibel zusammensetzbar

(Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2020)

Flexibles Rechnen

- verschiedene Sichtweisen



(Hatano & Oura, 2003; Rathgeb-Schnierer, 2006, 2011; Rechtsteiner-Merz, 2013, 2015; Selter, 2009; Verschaffel et al., 2009)

Flexibles Rechnen

- verschiedene Sichtweisen

adaptivity

Adäquatheit

◎ Adäquatheit von Lösungsweg und Aufgabencharakteristik

(u. a. Blöte et al., 2000; Klein & Beishuizen, 1999; Lorenz, 1997; Schipper, 2005; Steinberg, 1985)

- Adäquatheit von Lösungsrichtigkeit und Lösungsgeschwindigkeit
(u. a. Verschaffel et al., 2009, 2020)
- Adäquatheit der Anzahl der Lösungsschritte (Star & Newton, 2009)

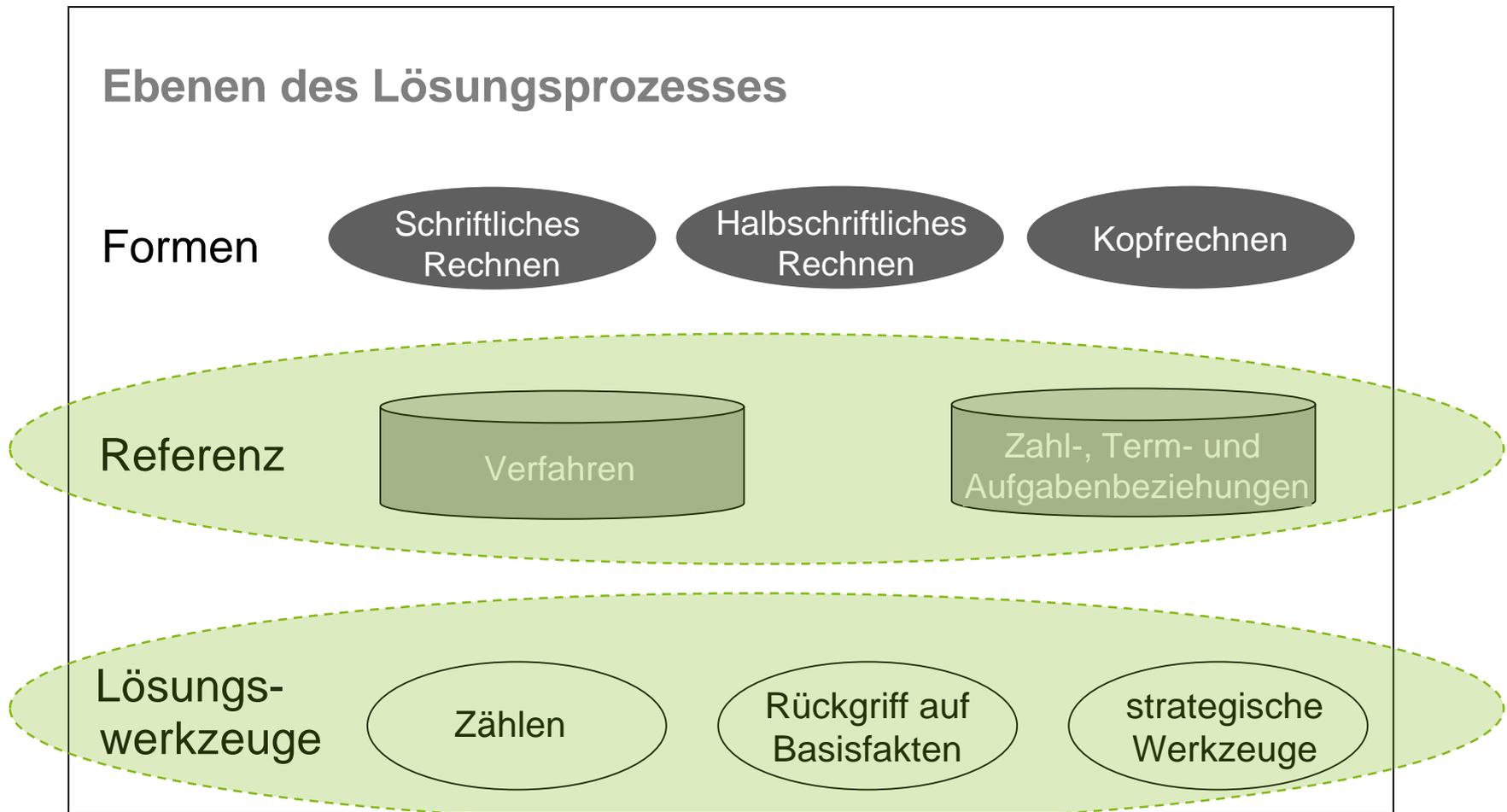
◎ Adäquatheit des Referenzrahmens

(Rathgeb-Schnierer, 2011; Rathgeb-Schnierer & Green, 2013, 2019; Rechtsteiner-Merz, 2013; Threlfall, 2009)

(Rechtsteiner-Merz, 2013, 2015)

Flexibles Rechnen

- verschiedene Sichtweisen



(Rathgeb-Schnierer, 2011)

Flexibles Rechnen entwickeln - Forschungsergebnisse

Einflussfaktoren & Voraussetzungen

- Flexibles Zahlenverständnis (McMullen et al., 2016, 2017)
- Kenntnisse der Strategien UND Fähigkeit zu deren Anpassung sind zentral (Macintyre & Forrester, 2003; Selter, 2009)
- Rechenwege hängen von verschiedenen Einflussfaktoren ab (Rathgeb-Schnierer, 2006, 2010)
 - Verfügen über strategische Werkzeuge,
 - Wissen über Zahlen und Rechenoperationen,
 - Zahlwahrnehmung,
 - Lösungskontext - dabei spielen individuelle Präferenzen eine zentrale Rolle

Flexibles Rechnen entwickeln - Forschungsergebnisse

Probleme

- Die Einführung einer Strategie führt zur Übernahme dieser als Hauptstrategie (Klein et al., 1998; Blöte et al., 2000; Heirdsfield & Cooper, 2002; Torbeyns et al, 2009a)
- Kinder nutzen nach Einführung der schriftlichen Rechenverfahren diese häufiger, unabhängig von deren Adäquatheit (Selter, 2000; Grübing et al., 2013, 2015)

Flexibles Rechnen entwickeln - Forschungsergebnisse

Einfluss durch die Art des Unterrichts

- Forschende Unterrichtsansätze sind im Vergleich zum traditionellen Unterricht erfolgreicher (Grüßing et al., 2013)
- Unterricht mit Blick auf Zahl- und Aufgabenmerkmale auf der Basis selbst entwickelter Lösungswege ist nachhaltiger (Zahlenblickschulung) (Grüßing et al., 2015; Heinze et al., 2018)
- Begleitung der Lehrkraft durch Strukturierungshilfen, Impulse und Fragestellungen sind für die Entwicklung komplexerer Lösungswege zentral (Heinze et al., 2018; 2020)

FLEXIBLES RECHNEN ENTWICKELN

DIE SCHULUNG DES ZAHLENBLICKS



Zahlenblick - was ist das?



672 - 335

- das augenblickliche Sehen und Nutzen von Beziehungen, um Zahlen geschickt zerlegen und neu zusammensetzen zu können

➔ Zahlenblick als Blick für Beziehungen und Strukturen

(Schütte, 2002, 2004, 2008)

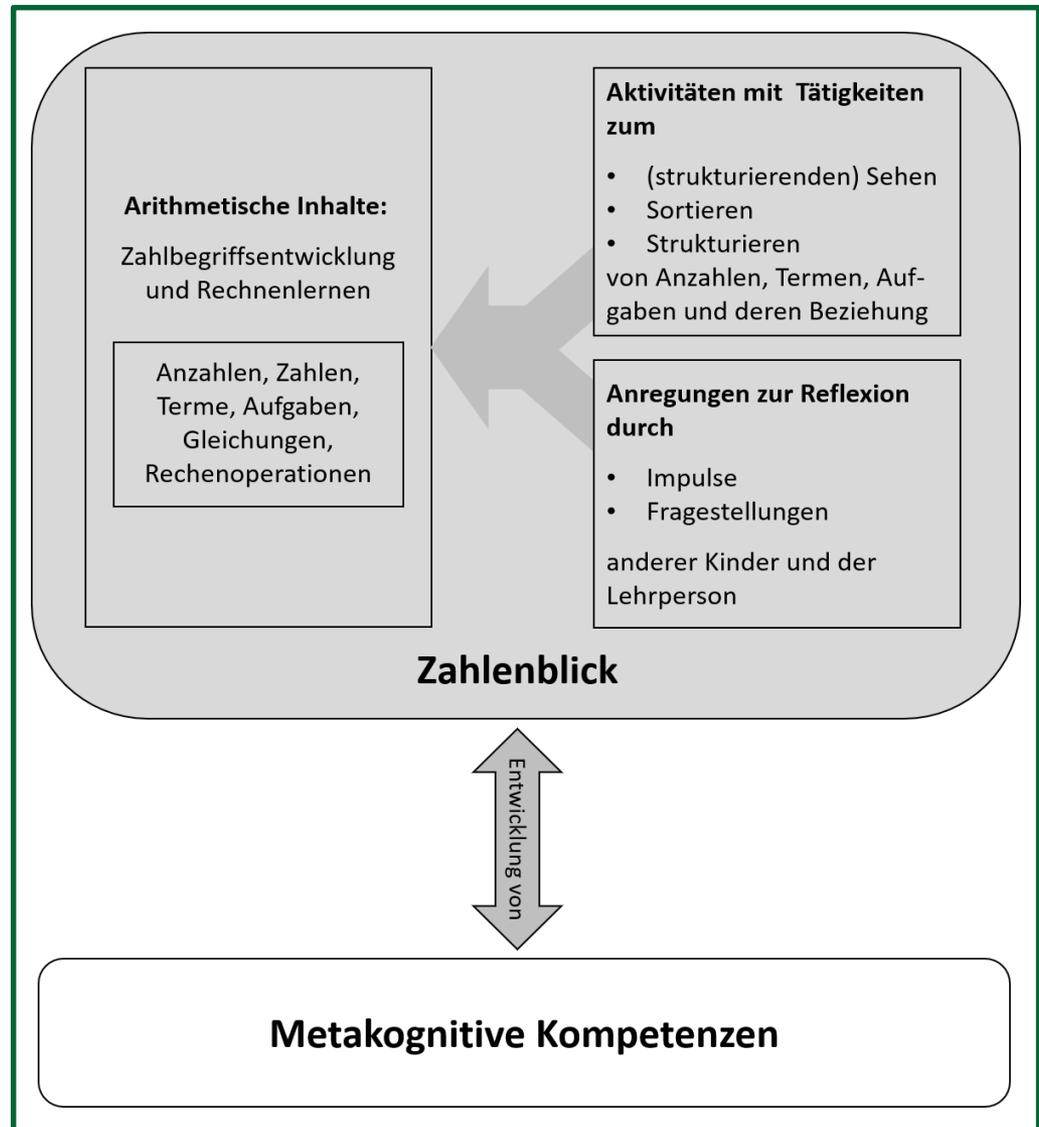
Zahlenblickschulung - wie geht das?

- „Diese Faustregel lehrt dich, die Zahlen vor dem Rechnen **a n z u s c h a u e n**, und das ist das Wichtigste, wenn du ein guter Rechner werden willst! Aber wie wenige tun das! Sie gehen **blindlings** auf die Zahlen los, fahren ihre Kanonen genau so gut gegen Zahlenelefanten auf wie gegen Zahlenmäuschen, die sie, wenn sie nur **s e h e n** wollten, im Nu erledigten. Nur der lernt vorteilhaft rechnen, der diesen **Zahlenblick** entwickelt.“

(Menninger, 1940, 10f; Hervorhebungen im Original)

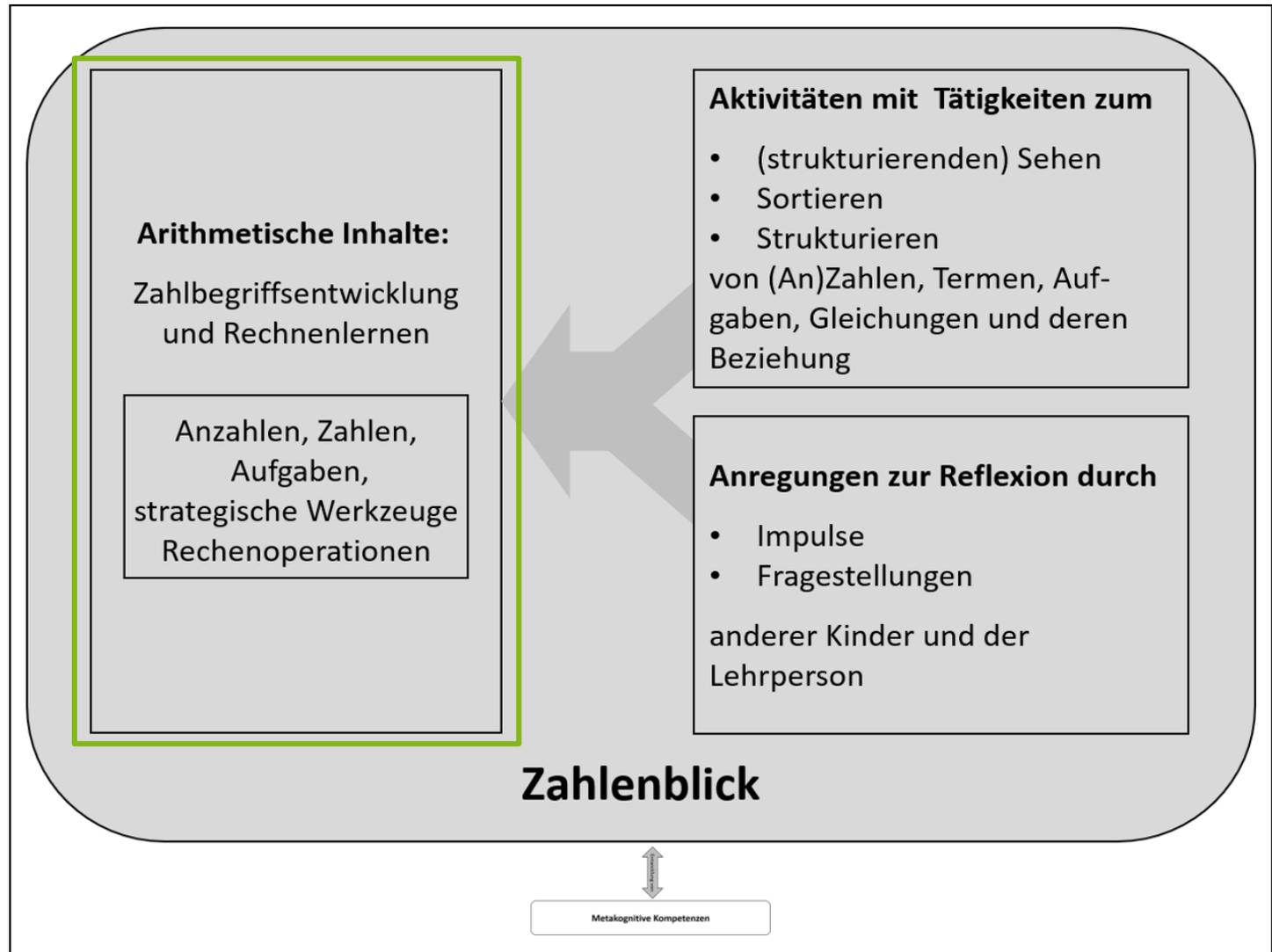
- Anreize schaffen „den Rechendrang aufzuhalten und den Blick auf die Art der Aufgabe zu lenken“ (Schütte, 2008, 144)

Zahlenblicks- schulung - wie geht das?

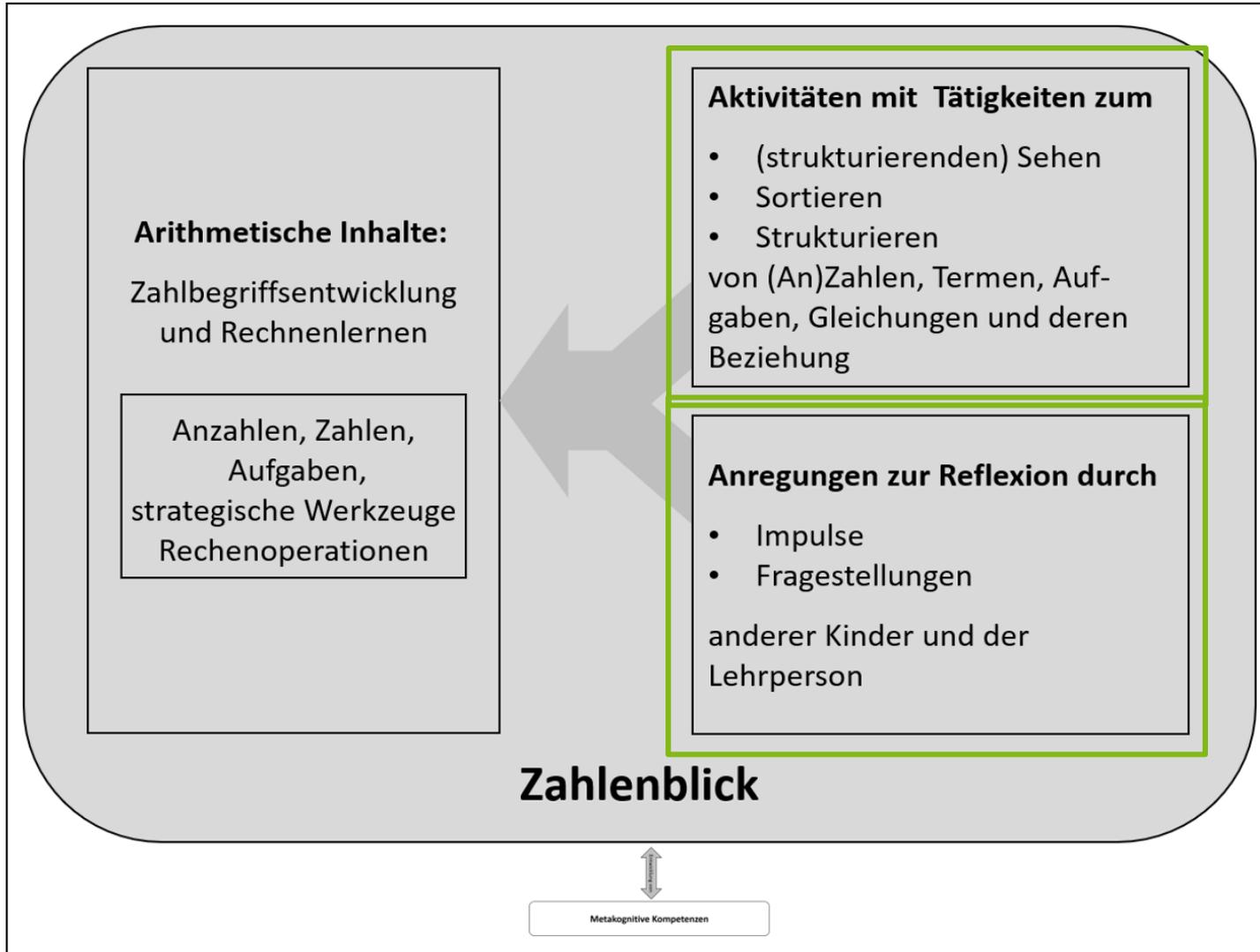


(modifiziert nach Rechtsteiner-Merz, 2013,
Martignon & Rechtsteiner, 2022;
Rechtsteiner & Scheffknecht, 2023)

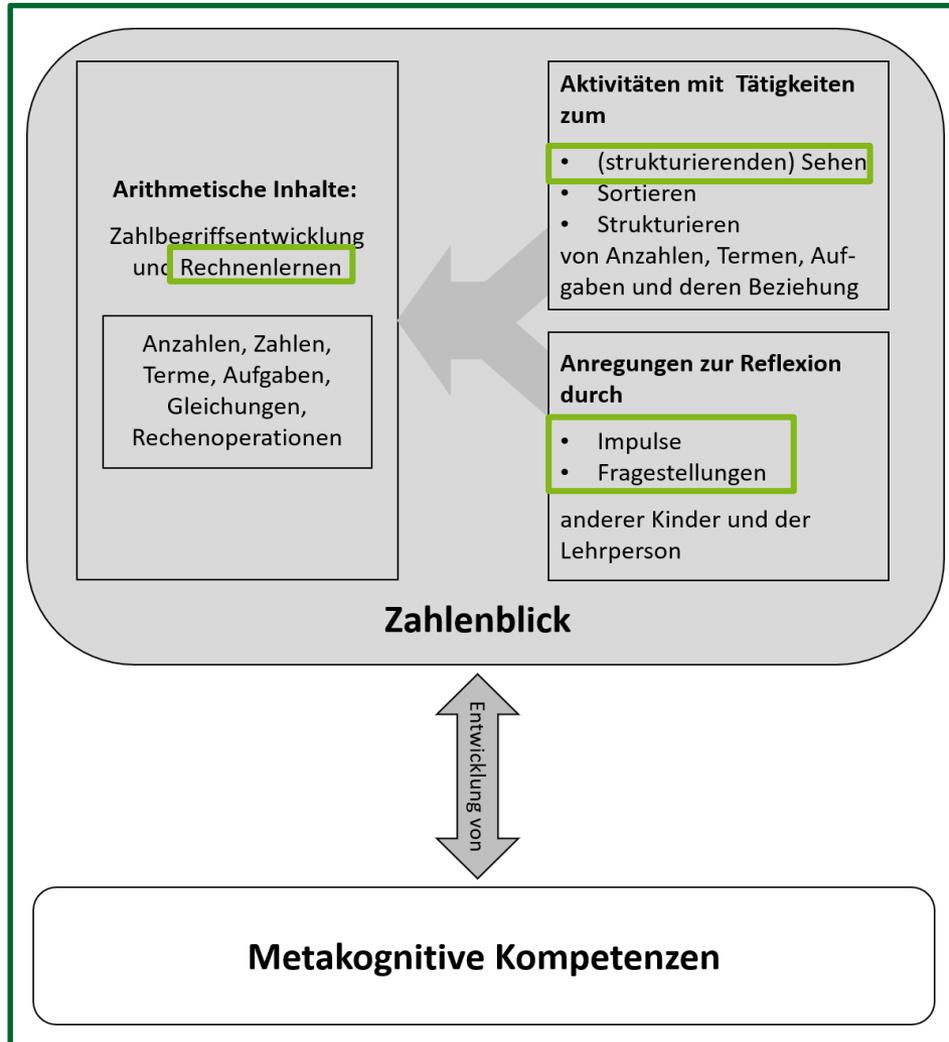
Zahlenblicksschulung - wie geht das?



Zahlenblicksschulung - wie geht das?



Zahlenblicksschulung - Beispiele



Was passiert eigentlich, wenn man bei einer Plusaufgabe die Einer vertauscht?

$$74 + 17 = \quad 77 + 14 =$$

Was passiert eigentlich, wenn man bei einer Minusaufgabe die Einer vertauscht?

$$77 - 14 = \quad 74 - 17 =$$

Was passiert?
Und warum ist das so?

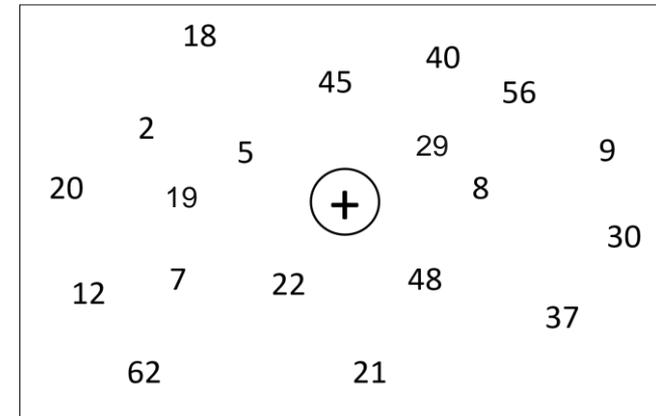
(Rathgeb-Schnierer, 2006; Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018)

Zahlenblickschulung - Beispiele

Sortieren von Aufgaben

Phasen der Aktivität

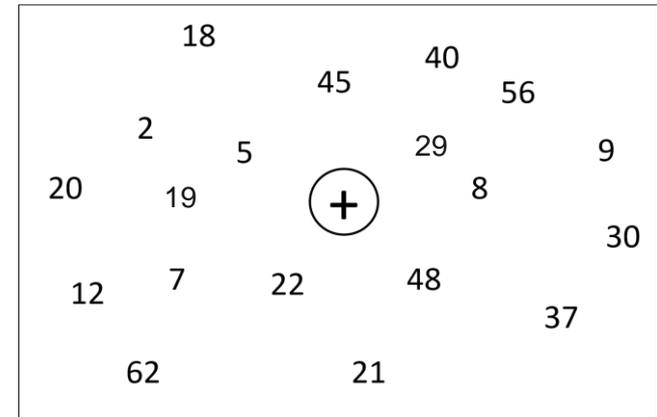
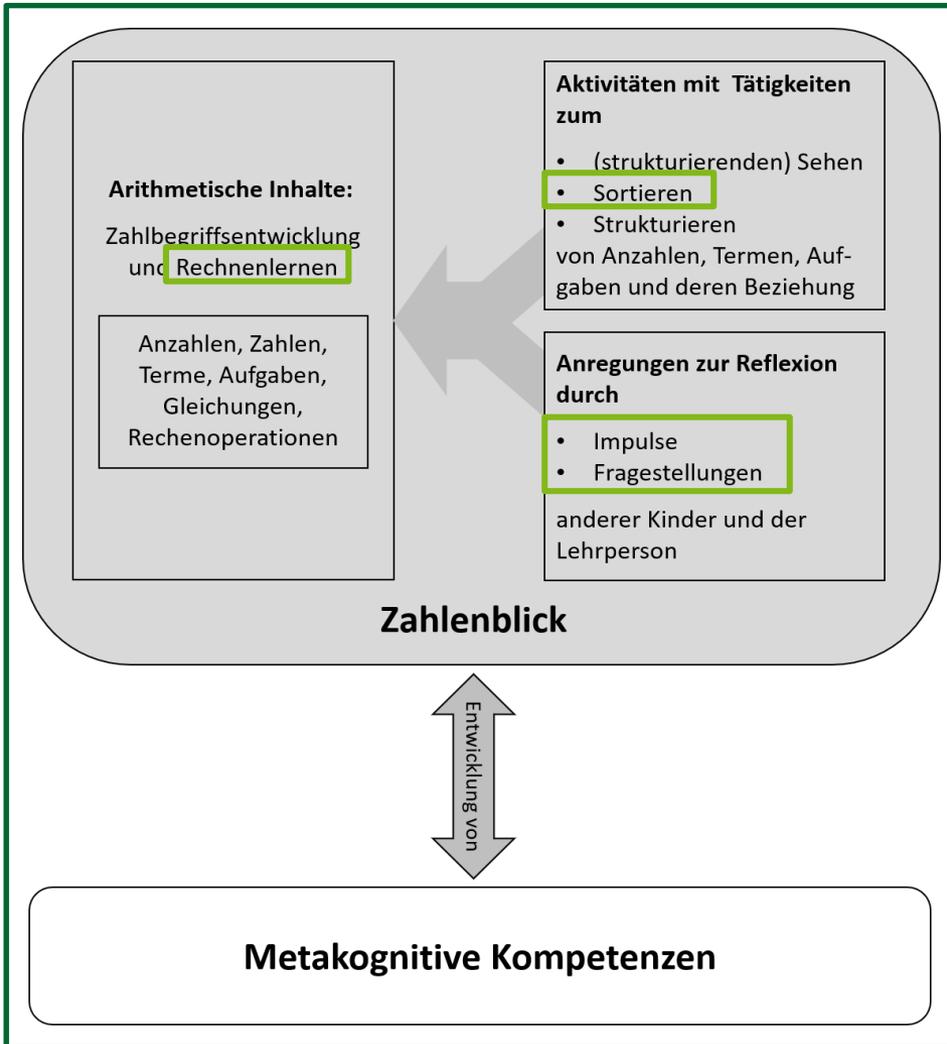
- (1) Sortierung begründen
- (2) Lösungsweg entwickeln
- (3) Aufgaben mit gleichen Merkmalen finden und allgemein beschreiben
- (4) weitere Aufgaben erfinden



leicht

schwer

Zahlenblicksschulung - Beispiele



leicht

schwer

(Rathgeb-Schnierer, 2006; Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018)

Flexibles Rechnen lernen

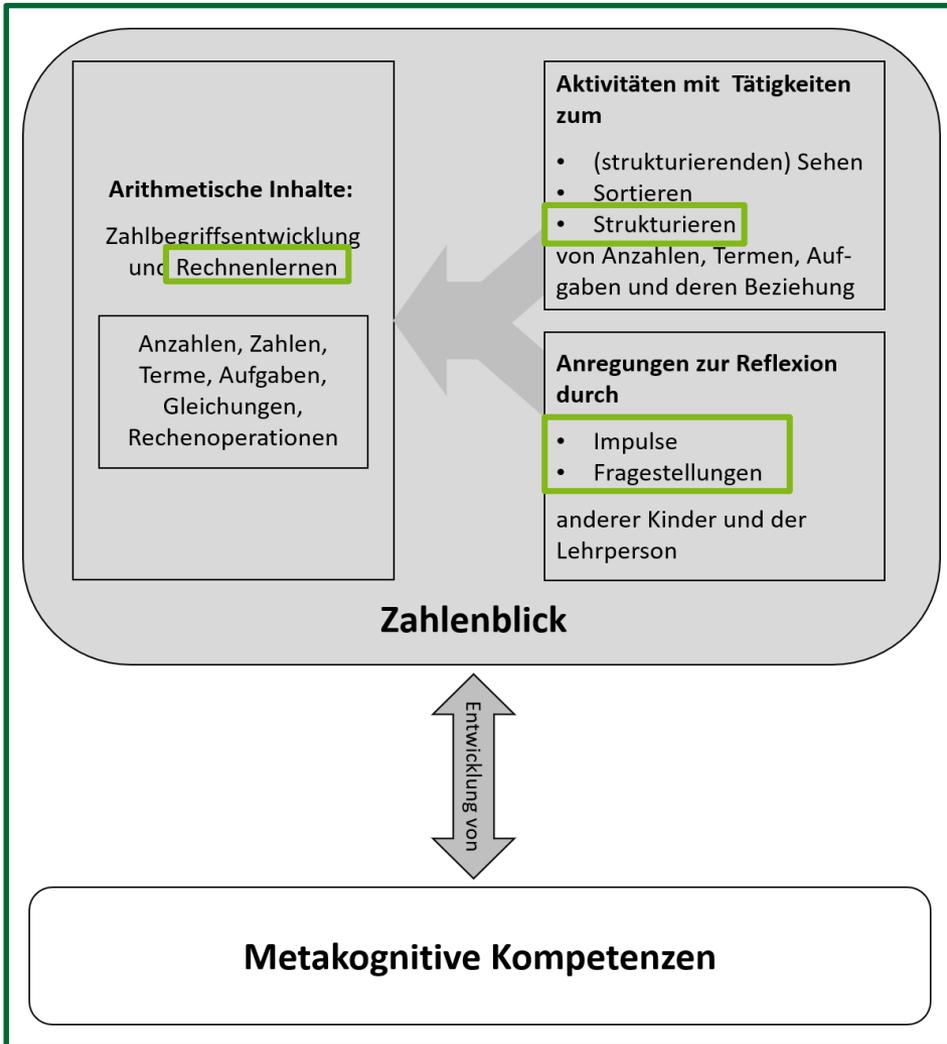
- Aufgaben sortieren in Klasse 1

Sortieren und
Begründen

muss ich zählen		kenne ich einen Trick		weiß ich auswendig		
9+8	3+2	12+6		14+5	3+1	3+5
5+9	7+8	13+3		13+7	4+5	4+2
6+7	9+5			1+1	6+2	3+6
	6+8			2+2	3+4	4+3
	8+9			3+3	2+8	5+2
	7+4			4+4	3+7	2+6
				8+8	4+6	9+2
					1+9	
					5+5	

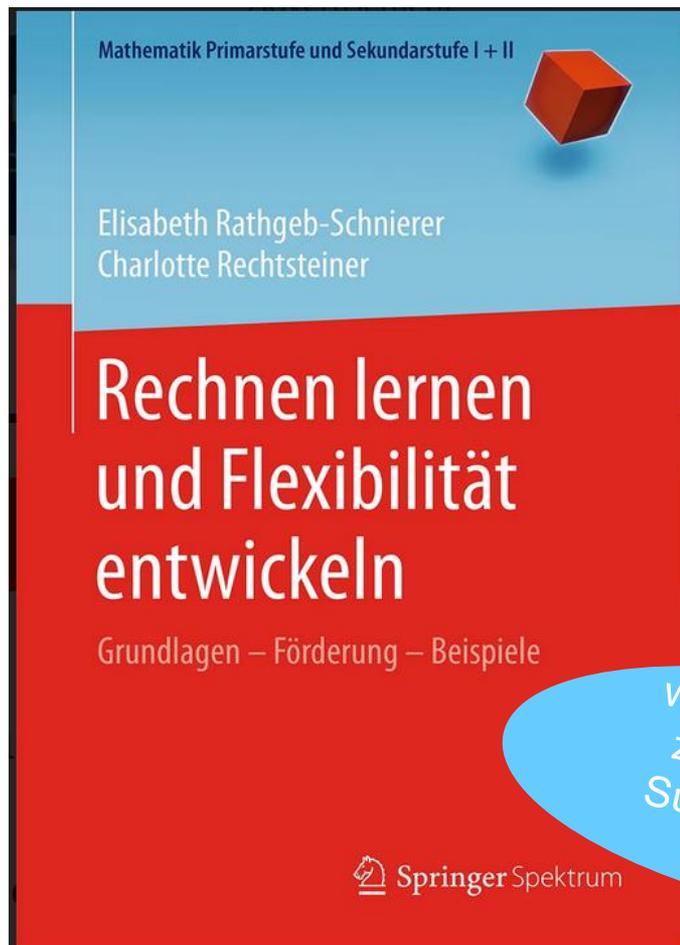
(Rechtsteiner & Scheffknecht, 2023)

Zahlenblicks- - Kombi-Gleichungen



Wie geht es weiter?

(Baireuther & Kucharz, 2007; Rechtsteiner-Merz, 2011, 2013; Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018)



Multiplikation und Division
erproben wir im Workshop

weitere Aktivitäten
zur Addition und
Subtraktion finden
Sie im Buch

FLEXIBLES RECHNEN ENTWICKELN

EMPIRISCHE ERGEBNISSE UND ZUSAMMENFASSUNG



Flexibles Rechnen entwickeln mit allen Kindern?!

Einfluss von Unterricht bei „besonderen“ Kindern

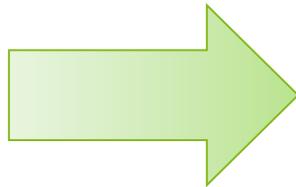
- Entwicklung flexiblen Rechnens bei begabten Kindern unabhängig von der Art des Unterrichts (Heinze et al., 2009; Torbeyns et al., 2009a)
- Schwache Kinder zeigen ebenfalls aufgabenadäquates Handeln (Torbeyns et al., 2005; Verschaffel et al., 2007)

Flexibles Rechnen - Forschungsergebnisse

Einfluss von Unterricht bei schwachen Kindern

- **gezielt anregender Unterricht nötig** (Torbeyns et al., 2009a; Peltenburg et al., 2012; Rechtsteiner-Merz, 2013)
- **Verschiedene Unterrichtsansätze fördern die Entwicklung** (Pregler & Selter, 2005; Torbeyns et al., 2005; Peltenburg et al., 2012; Werner & Klein, 2012; Rechtsteiner-Merz, 2013)
- **die Schulung des Zahlenblicks erweist sich als förderlicher Unterrichtsansatz** (Rechtsteiner-Merz, 2013)

Flexibles Rechnen entwickeln - ab wann?



Ablösung vom zählenden
Rechnen

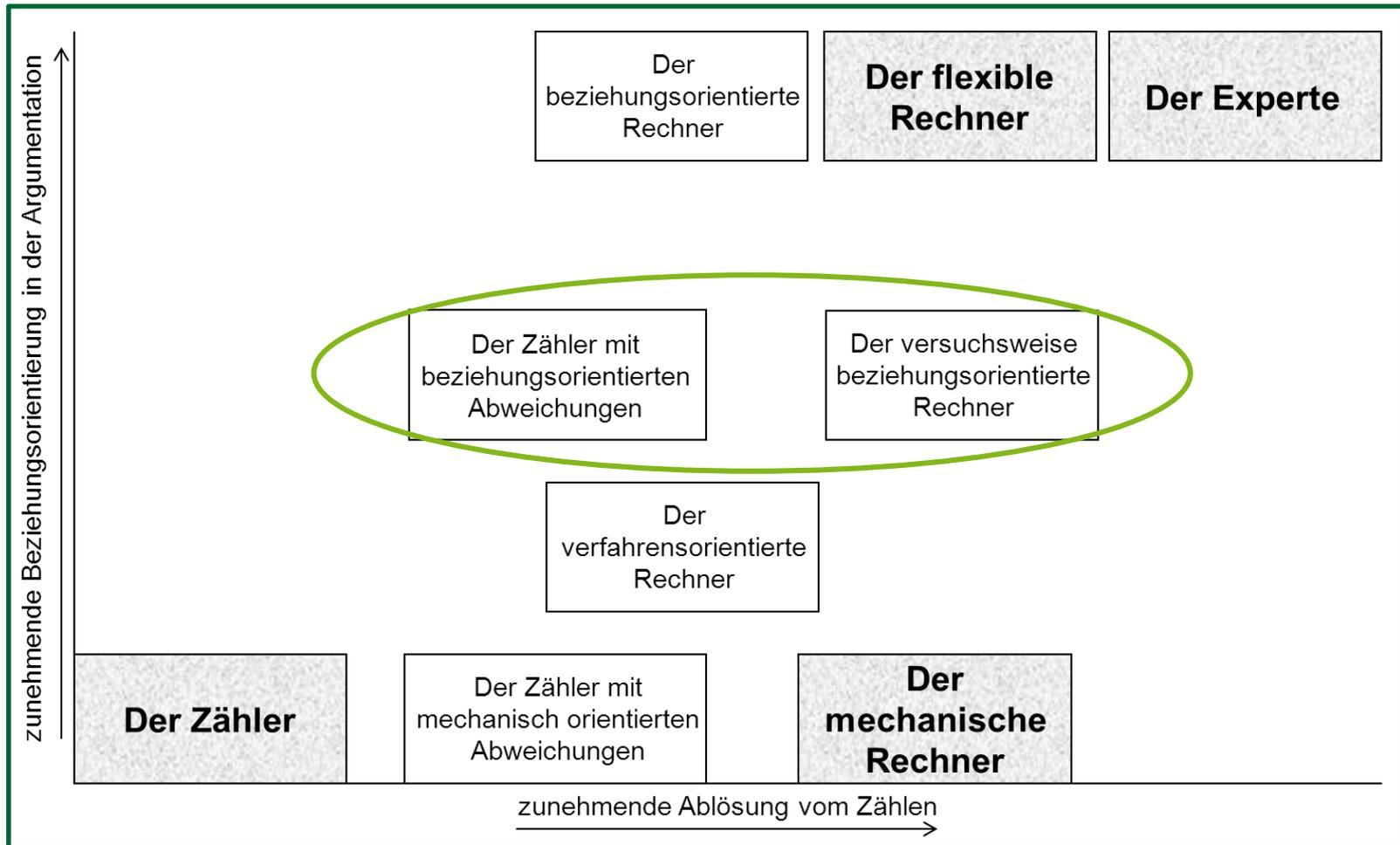


Entwicklung flexiblen Rechnens

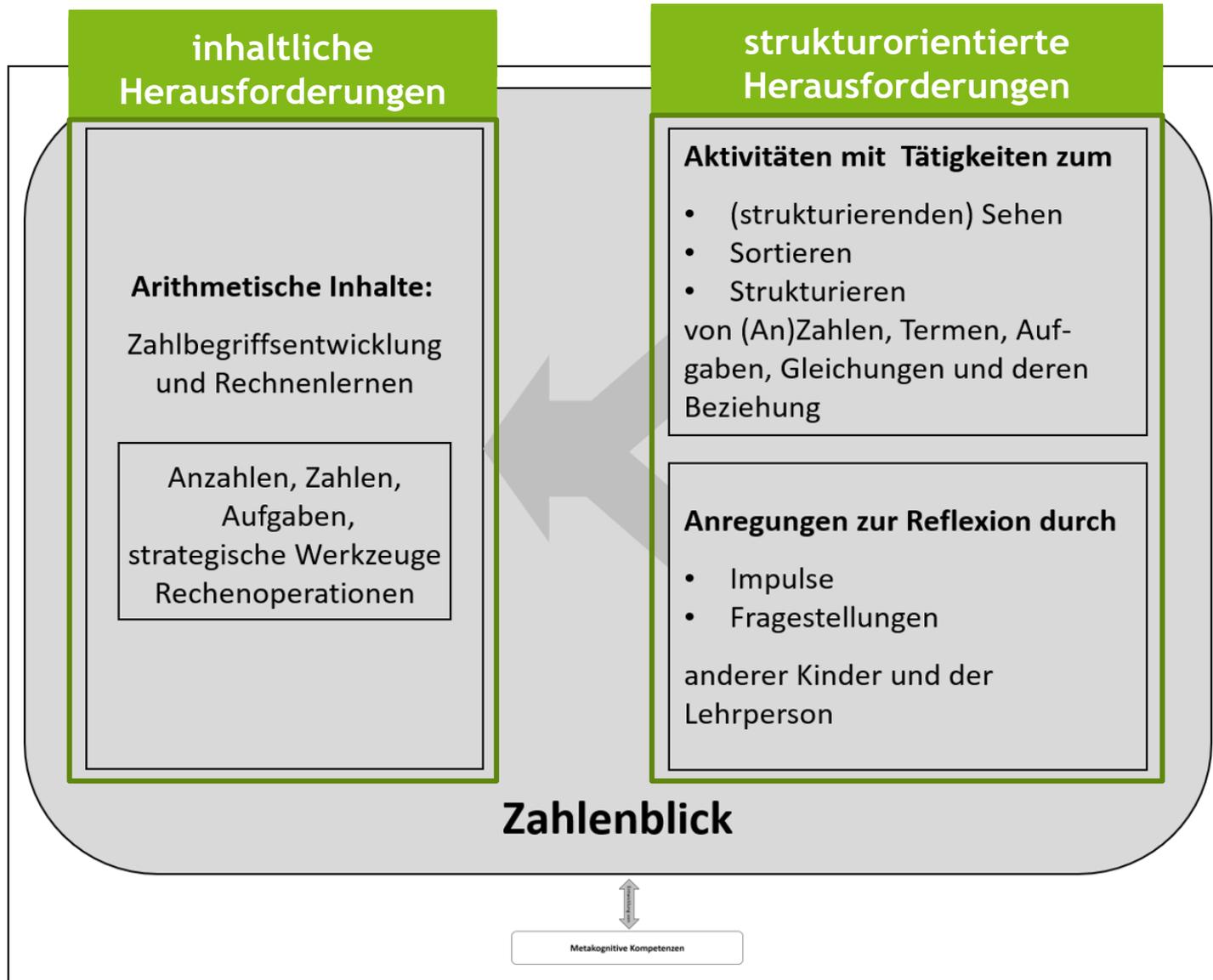


(Wittmann & Müller, 1990; Baroody, 2003; Geary, 2003; Schütte, 2004; Rechtsteiner-Merz, 2015; Verschaffel et al., 2007)

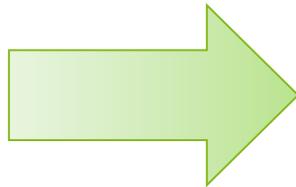
Beziehungsorientierung ist Voraussetzung für die Ablösung vom zählenden Rechnen



(Rechtsteiner-Merz, 2013)



Flexibles Rechnen entwickeln - ab wann?



Ablösung vom zählenden
Rechnen

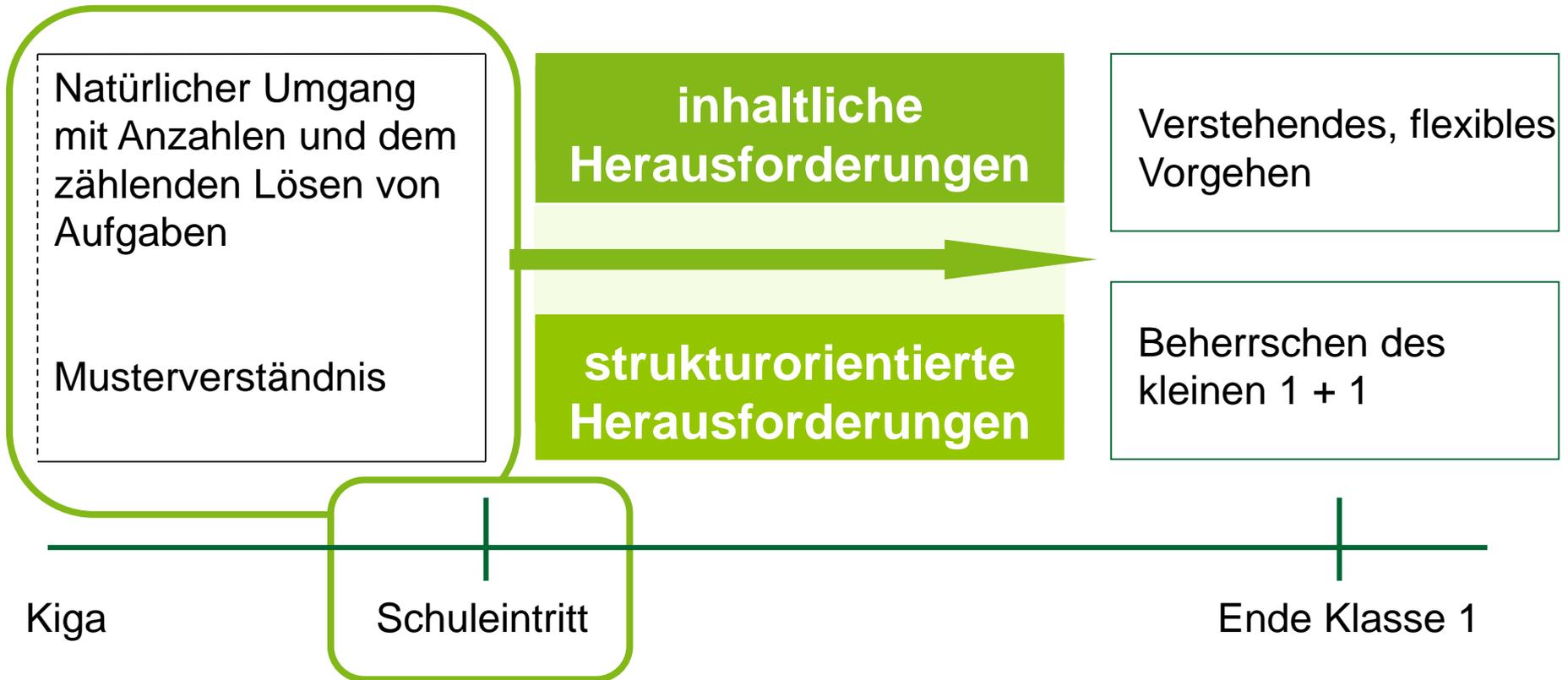


Entwicklung flexiblen Rechnens



(Wittmann & Müller, 1990; Baroody, 2003; Geary, 2003; Schütte, 2004; Rechtsteiner-Merz, 2015; Verschaffel et al., 2007)

Vom Zählen zum Rechnen



(u. a. Häsel-Weide, 2016; Lüken, 2012; Mulligan et al., 2005; Rechtsteiner-Merz, 2013; Rechtsteiner, 2017; Rechtsteiner & Scheffknecht, 2023; Wjins et al., 2021)

HERZLICHEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT!

rechtsteiner@ph-ludwigsburg.de



Literaturverzeichnis

- Baireuther, P. & Kucharz, D. (2007). Mathematik in jahrgangsheterogenen Lerngruppen. *Grundschulunterricht Mathematik* (11), 25-30.
- Baroody, A. J. (2003). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of Conceptual and Procedural Knowledge. In A. J. Baroody & A. D. (Hrsg.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (S. 1-33). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Blöte, A. W. & Klein, A. S. & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction* (10), 221-247.
- Dehane, S. (1999). *Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser Verlag.
- Gaidoschik, M. (2007). *Rechenschwäche vorbeugen. Das Handbuch für LehrerInnen und Eltern. 1. Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen*. Wien: Öbv & hpt.
- Geary, D. C. (2003). Learning Disabilities in Arithmetic: Problem-Solving Differences and Cognitive Deficits. In H. L. Swanson, K. R. Harris & S. Graham (Hrsg.), *Handbook of Learning Disabilities* (S. 199-212). New York: A Division of Guilford Publications.
- Grüßing, M., Schwabe, J., Heinze, A. & Lipowsky, F. (2013). The effects of two instructional approaches on 3rd-graders' adaptive strategy use for multi-digit-addition and subtraction. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2 (S. 193-400). Kiel: PME.
- Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen. Strukturfokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Literaturverzeichnis

- Hatano, G. (2003). Foreword. In A. J. Baroody & A. Dowker (Hrsg.). *The Development of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (xi-xiii). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Heinze, A., Marschik, F. & Lipowsky, F. (2009). Addition and Subtraction of three-digit numbers: adaptive strategy use and the influence of instruction in German third grade. *ZDM Mathematics Education* 41, 591-604.
- Heinze, A., Schwabe, J., Grüßing, M. & Lipowsky, F. (2015). Effects of instruction on strategy types chosen by German 3rd-graders for multi-digit addition and subtraction tasks: an experimental study. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Hrsg.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (S. 49-56.) Hobart, Australia: PME.
- Heinze, A., Arend, J., Grüßing, M. & Lipowsky, F. (2018). Instructional approaches to foster third graders' adaptive use of strategies: an experimental study on the effects of two learning environments on multi-digit addition and subtraction. *Instruction Science* 46, 869-891.
<https://doi.org/10.1007/s11251-018-9457-1>
- Heinze, A., Arend, J., Grüßing, M. & Lipowsky, F. (2020). Systematisch einführen oder selbst entdecken lassen? Eine experimentelle Studie zur Förderung der adaptiven Nutzung von Rechenstrategien bei Grundschulkindern. *Unterrichtswissenschaft* 48, 11-43.
<https://doi.org/10.1007/s42010-019-00063-6>
- Heirdsfiel, A. M. & Cooper, T. J. (2002). Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: two case studies. *Journal of Mathematical Behavior* 21(1), 57-74.

Literaturverzeichnis

- Kaufmann, S. & Wessolowski, S. (2006). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine*. Seelze: Kallmeyer [u.a.].
- Klein, A. S. & Beishuizen, M. (1998). The Empty Number Line in Dutch. Second Grades: Realistic Versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education* Vol. 29 (No. 4), 443-464.
- Klein, A. S., Beishuizen, M. & Treffers, A. (2002). The Empty Number Line in Dutch Second Grade. In J. Sowder & B. Schappelle (Hrsg.), *Lessons Learned From Research* (S. 41-43). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics
- Lorenz, J. H. (1997). Is mental calculation just strolling around in an imaginary number space? In M. Beishuizen, K. P. E. Grevemeijer & E. C. D. M. van Lieshout (Hrsg.). *The Role of Contexts and Models in the Development of Mathematical Strategies and Procedures* (S. 199 - 213). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Lüken, M. M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht*. Münster [u. a.]: Waxmann.
- Macintyre, T. & Forrester, R. (2003). Strategies of Mental Calculation. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 23(2), 49-54.
- Martignon, L. & Rechtsteiner, Ch. (2022). The Benefits of an Interdisciplinary Approach to Mathematics Education on Issues Around Computation in School. *Front. Psychol.* (13), 533402, <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.533402>

Literaturverzeichnis

- McMullen, J., Brezovszky, B., Hannula-Sormunen, M., Veermans, K., Lehtinen, E. (2016). Adaptive number knowledge: Exploring the foundations of adaptivity with whole-number arithmetic. *Learning and Individual Differences* 47, 172-181.
- McMullen, J., Brezovszky, B., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Hannula-Sormunen, M., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Lehtinen, E. (2017). Adaptive number knowledge and its relation to arithmetic and prealgebra knowledge. *Learning and Instruction* 49, 178-187.
- Menninger, K. (1940). *Rechenkniffe. Lustiges und vorteilhaftes Rechnen. Ein Lehr- und Handbuch für das tägliche Rechnen.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
- Mulligan, J., Mitchelmore, M. & Prescott, A. (2006). Case studies of children's development of structure in early mathematics: a two-year longitudinal study. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Hrsg.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, S. 1-8. Melbourne: PME.
- Peltenburg, M., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Robitsch, A. (2011). Special education students' use of indirect addition in solving subtraction problems up to 100 - A proof of the didactical potential of an ignored procedure. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 351-369.
- Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen von Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze.* Hildesheim; Berlin: Franzbecker.
- Rathgeb-Schnierer, E. (2010a). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. *Journal für Mathematik-Didaktik* 31(2), 257-283.

Literaturverzeichnis

- Rathgeb-Schnierer, E. (2011). Warum noch rechnen, wenn ich die Lösung sehen kann? Hintergründe zur Förderung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 15-22). Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien.
- Rathgeb-Schnierer, E., & Green, M. (2013). Flexibility in mental calculation in elementary students from different Math Classes. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 353-362). Ankara: Middle East Technical University.
- Rathgeb-Schnierer, E. & Green, M. (2019). Developing Flexibility in Mental Calculation. *Educação & Realidade, Porto Alegre*, v. 44, n. 2, e87078, 2019.
<http://dx.doi.org/10.1590/2175-623687078>
- Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, Ch. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Rechtsteiner-Merz, Ch. (2011). Den Zahlenblick schulen. Flexibles Rechnen entwickeln. *Die Grundschulzeitschrift*, 248.249, Materialbeilage.
- Rechtsteiner-Merz, Ch. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen*. Münster [u.a.]: Waxmann.

Literaturverzeichnis

- Rechtsteiner-Merz, Ch. (2015). Rechnen entwickeln - Flexibilität fördern. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2015* (S. 55-70). Bamberg: University of Bamberg Press.
- Rechtsteiner, Ch. (2017). Den Zahlenblick schulen und rechnen lernen. In L. Huck & A. Schulz (Hrsg.), *Lerntherapie in Theorie und Praxis. Lerntherapie und inklusive Schule* (S.44-55) Berlin: Dudenverlag.
- Rechtsteiner, Ch. & Scheffknecht, M. (2023). Die Schulung des Zahlenblicks bei der Ablösung vom Zählen - eine qualitative Einzelfallstudie zu Beziehungen, Strukturen und Rechnenlernen (BeSteR). *mathematica didactica* 46, 1-22. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2023.1674>
- Schipper, W. (2002). Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. In *Journal für Mathematik-Didaktik* 23 (3/4), 243-261.
- Schipper, W. (2005). *Modul G4: Lernschwierigkeiten erkennen - verständnisvolles Lernen fördern*. Mathematik. Kiel (SINUS-Transfer Grundschule).
- Schütte, S. (2002). Aktivitäten zur Schulung des „Zahlenblicks“. *Praxis Grundschule*, 2(2002), 5-12.
- Schütte, S. (2004). Rechenwegsnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 25 (2), 130-148.
- Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur*. München: Oldenbourg.

Literaturverzeichnis

- Selter, Ch. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematik-Didaktik* 21(3/4), 227-258.
- Selter, Ch. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 41, 619-625.
- Star, J. R. & Newton, K. J. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM Mathematics Education* (41), 557-567.
- Steinberg, R. M. (1985). Instruction on Derived Facts Strategies in Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education* 16 (5), 337-355.
- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education* (41), 541-555.
- Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesquière, P. (2005). Simple Addition Strategies in a First-Grade Class With Multiple Strategy Instruction. *Cognition and Instruction*, 23(1), 1-21.
- Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P. & Verschaffel, L (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics*, 71(1), 1-17.
- Verschaffel, L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K. & Van Dooren, W. (2007). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational and Child Psychology*, 24(2), 16-27.

Literaturverzeichnis

- Verschaffel, L., Luwel, K., van Torbeyns, J., van Dooren, W. (2009). Conceptualising, investigating and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education* 24 (3), 335-359.
- Wartha, S. & Schulz, A. (2014). *Rechenproblemen vorbeugen*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Werner, B. & Klein, T. (2012). "Ich rechne immer mit den Fingern, aber heute hab' ich das mal im Kopf gemacht". Flexibilität bei der Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 bei Förderschülern. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 63(4), 162-170.
- Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B. & Torbeyns, J. (2021). Associations Between Repeating Patterning, Growing Patterning, and Numerical Ability: A Longitudinal Panel Study in 4- to 6-Year Olds. *Child Development* 92(4), 1354-1368. <https://doi.org/10.1111/cdev.13490>
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Stuttgart; Düsseldorf; Berlin; Leipzig: Klett.