

Lehrerinformation 1

Mathematik (CAS - Newtonverfahren) - Klassenstufen 9 – 12

Impulsbeispiel zur Lehrplanimplementation

1. Übersicht der Materialien

Dateiname	Bezeichnung in der Mediothek
Ma_Einfuehrung_CAS_9_12.pdf	Einführung (pdf)
Ma_Lehrerinfo_1_Newtonverfahren_TI.pdf	Newtonverfahren TI (pdf)
Ma_Lehrerinfo_2_Newtonverfahren_CASIO.pdf	Newtonverfahren CASIO (pdf)

2. Didaktisch-methodische Überlegungen

→ Bitte beachten Sie auch die Ausführungen im Einführungsteil für die Impulsbeispiele Mathematik (Klassenstufen 9 – 12, CAS).

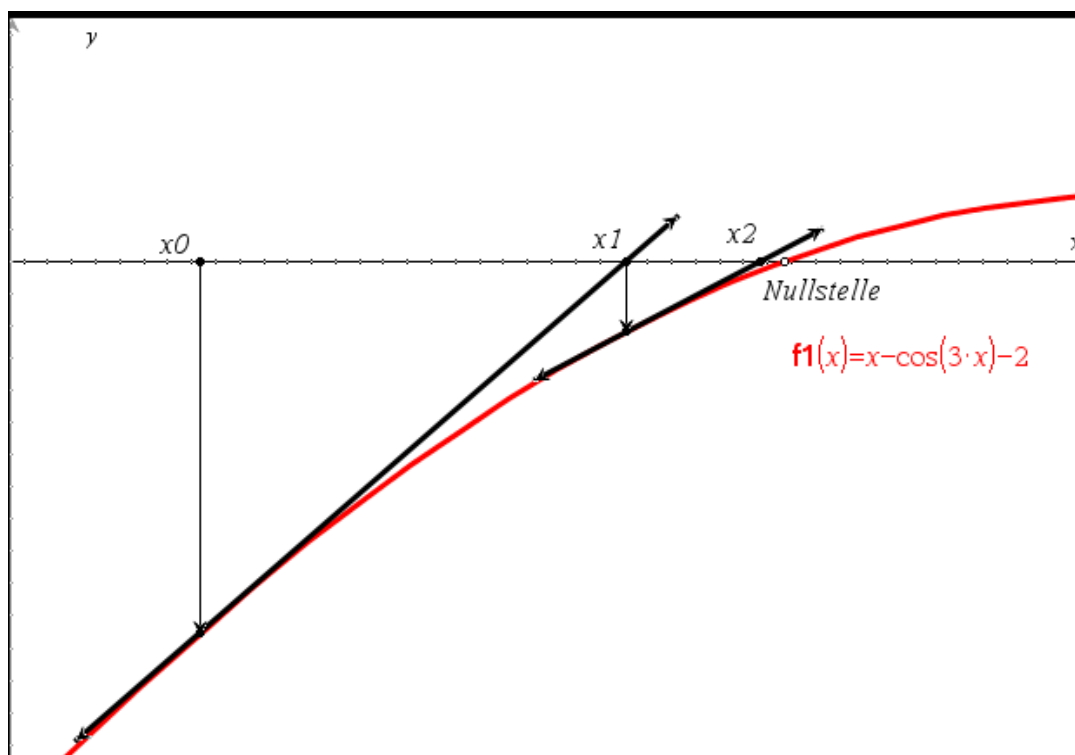
Das Impulsbeispiel „Eine Einführung des Newtonschen Näherungsverfahrens zum Lösen von Gleichungen“ kann unterschiedlich didaktisch-methodisch im Unterricht umgesetzt werden. Es bieten sich zur Erarbeitung des Newtonverfahrens lehrerzentrierte Unterrichtsphasen ebenso an wie schülerzentrierte Arbeitsphasen. Hierzu sollten für die Schüler Lernsituationen geschaffen werden, um mit dem CAS-Schulrechner selbst probieren und Zusammenhänge entdecken zu können. Ergebnisse können in Partner- bzw. Gruppengesprächen ausgetauscht, überprüft und entsprechend verändert werden.

Das vorliegende Material kann vom Lehrer entsprechend der Unterrichts- und Kurssituation angepasst werden. Die Aufgaben kann der Schüler weitestgehend selbstständig bearbeiten.

Verwendet wurde ein **TI-Nspire**.



Eine Einführung des Newtonschen Näherungsverfahrens zum Lösen von Gleichungen



Lehrplanbezug

Die Ziele des Kompetenzerwerbs werden aus dem Lernbereich Analysis/Klassenstufe 12 aufgeführt.

Sachkompetenz (Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife ¹ , S. 38)
Der Schüler kann <ul style="list-style-type: none"> - das Newtonverfahren zur näherungsweise Bestimmung von Nullstellen beschreiben, ...
Methodenkompetenz (Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife, S. 39)
Der Schüler kann <ul style="list-style-type: none"> - dynamische Darstellungsmöglichkeiten des CAS nutzen, um mathematische Modelle zu vergleichen und diese zu variieren, ...
Selbst- und Sozialkompetenz (Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife, S. 39)
Der Schüler kann <ul style="list-style-type: none"> - mit Ergebnissen, die das CAS anzeigt, kritisch umgehen und seine Lösungsstrategie ggf. entsprechend ändern ...

¹ Siehe www.schulportal-thueringen.de.

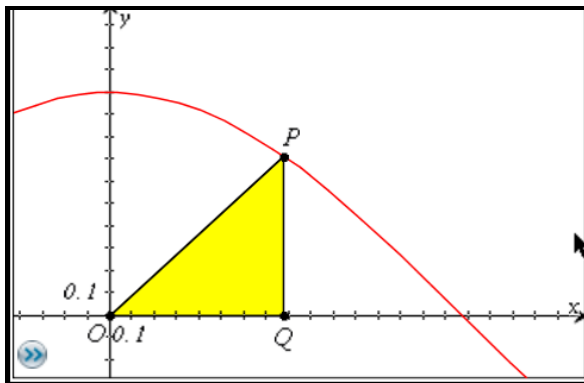
Einstieg/ Motivation

Oftmals entstehen beim Untersuchen von mathematischen oder praktischen Problemen Gleichungen, für deren Lösung es keine Methode gibt, die ein exaktes Resultat liefert.

Beispiel:

Auf dem Graphen der Funktion $y = \cos(x)$ liegt ein Punkt $P(u; \cos(u))$ mit $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$. Weiter sind die Punkte $Q(u; 0)$ und $O(0; 0)$ gegeben.

Ermitteln Sie den Wert u so, dass das Dreieck OQP den maximalen Flächeninhalt hat.



Der Flächeninhalt des Dreiecks wird durch $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \cos(u)$ mit $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ berechnet.

Für eine mögliche Extremstelle muss die Nullstelle der 1. Ableitung von $A(u)$ ermittelt werden.

$$A'(u) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(u) - u \cdot \sin(u))$$

Mit $A'(u) = 0$ ist also die Gleichung $\cos(u) - u \cdot \sin(u) = 0$ zu lösen. Dafür gibt es aber keinen exakten Lösungsalgorithmus, es muss ein Näherungsverfahren angewendet werden.

CAS-Rechner finden für solche Gleichungen Lösungen auch nur mit Hilfe eines Näherungsverfahrens:

```
solve(1/2 * (cos(x) - x * sin(x)) = 0, x) | 0 <= x <= pi/2
x = 0.860334
```

Eines dieser **Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen** – es wurde nach seinem Entdecker ISAAC NEWTON² benannt – wird im Folgenden vorgestellt, um ein besseres Verständnis für die mathematischen Hintergründe zu erhalten.

² Sir **Isaac Newton** (1642 bis 1726) war ein englischer Naturforscher, Mathematiker und Verwaltungsbeamter.

Das Grundprinzip des Newtonverfahrens

Das Newtonverfahren wird am Beispiel der Nullstellenberechnung für die Funktion $y = -x^2 + 2$ erläutert. Die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ kann man natürlich auch direkt und ohne Näherungsverfahren lösen. Bekanntlich sind die irrationalen Zahlen $\pm\sqrt{2} \approx 1,41421$ die zugehörigen Lösungen. Die Überschaubarkeit der notwendigen Untersuchungen lässt dieses Beispiel jedoch besonders geeignet erscheinen, um das prinzipielle Vorgehen des Newtonschen Näherungsverfahrens zu erläutern.

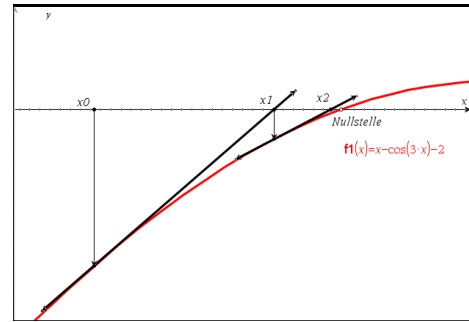
	<p>Man wählt einen Startwert x_0, der „in der Nähe“ der zu bestimmenden Nullstelle liegt, hier z. B. $x_0 = 0,5$.</p> <p>Der Punkt $(x_0; 0)$ wird mit dem Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ verbunden.</p>
	<p>Im Punkt $P_0(x_0; f(x_0))$ wird die Tangente an den Graphen von f gelegt.</p> <p>Die Nullstelle x_1 der Tangente liegt, wenn der Startwert geschickt gewählt wurde, näher an der gesuchten Nullstelle als x_0.</p> <p>Tangentengleichung: $y = -x + 2,25$</p> <p>Nullstelle: $x_1 = 2,25$</p>
	<p>Jetzt wird im Punkt $P_1(x_1; f(x_1))$ die Tangente an den Graphen von f gelegt und das Verfahren wiederholt.</p> <p>Tangentengleichung: $y = -4,5x + 7,0625$</p> <p>Nullstelle: $x_2 \approx 1,56944$</p>
<p>Man kann nun im Punkt $P_2(x_2; f(x_2))$ die Tangente an den Graphen von f legen und das Verfahren bis zu einer Stelle x_n solange wiederholen, bis eine gewünschte Genauigkeit erreicht ist.</p>	

Aufgaben

1. Vervollständigen Sie die Abfolge, indem Sie die Nullstelle der Tangente im Punkt $P_2(x_2; f(x_2))$ rechnerisch ermitteln.
2. Berechnen Sie analog zu dem vorgestellten Beispiel für die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ den Näherungswert x_2 , wenn Sie als Startwert $x_0 = -1$ wählen.
3. Beurteilen Sie das Verfahren, wenn Sie als Startwert $x_0 = 0$ verwenden.

Der Algorithmus zum Newtonverfahren

Zeigen Sie allgemein, dass sich folgender Algorithmus zur Nullstellenberechnung für eine Funktion $y = f(x)$ herleiten lässt:



Algorithmus zum Newtonschen Näherungsverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{mit } f'(x_n) \neq 0$$

Startwert x_0

Orientieren Sie sich dabei an folgenden Hinweisen und vervollständigen Sie die Textfelder.

Stellen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 auf.

Zeigen Sie, dass für die Nullstelle x_1 der Tangente gilt: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ mit $f'(x_0) \neq 0$.

Legt man nun die Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_1 an, so ergibt sich analog für deren Nullstelle x_2 :

Setzt man das Verfahren fort, so erhält man stets den gleichen Zusammenhang zwischen zwei aufeinander folgenden Werten x_n und x_{n+1} . Er lässt sich durch folgende Vorschrift beschreiben:

Anwendungen des Algorithmus zum Newtonverfahren

Beispiel 1

Berechnung der Nullstellen von $y = f(x) = -x^2 + 2$ (siehe Seite 4)

Mit $f'(x) = -2x$ ergibt sich aus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ mit } f'(x_n) \neq 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-x_n^2 + 2}{-2 \cdot x_n} \text{ oder etwas vereinfacht}$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2 \cdot x_n}$$

Diese rekursive Bildungsvorschrift lässt sich sehr einfach mit einer Tabellenkalkulation durch relative Adressierung realisieren.

Hier wird der Startwert $x_0 = 1$ gewählt. Man erkennt, dass sich die Werte im Rahmen der eingestellten Genauigkeit bereits ab der Nummer 4 stabilisieren.

A nummer	B wert
1	0
2	1
3	1.41667
4	1.41422
5	1.41421
6	1.41421
7	1.41421
8	1.41421
9	1.41421
10	1.41421
11	1.41421

In der Spalte A werden die Näherungswerte nummeriert.
Zelle A1: 0
Zelle A2: = A1 + 1

In der Spalte B werden die Näherungswerte berechnet.
Zelle B1: 1
(entspricht dem Startwert x_0)
Zelle B2: = $\frac{B1^2 + 2}{2 \cdot B1}$

(entspricht der Rekursionsformel $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{x_n}$, der Dezimalpunkt hinter dem Summanden 2 sorgt für die Anzeige der berechneten Werte als Dezimalbrüche)

Die beiden Formeln aus den Zellen A2 und B2 werden durch „nach unten ausfüllen“ in etwa zehn darunter stehende Zellen kopiert.

B2 = $\frac{b1^2+2}{2 \cdot b1}$

Aufgabe

Erstellen Sie eine Tabelle zu diesem Beispiel auf Ihrem Taschencomputer. Wählen Sie als Startwerte in der Zelle B1 die Zahlen $x_0 = -1$ bzw. $x_0 = 0$.

Interpretieren Sie die Anzeige der Tabellenkalkulation.

Beschreiben Sie die Veränderungen in den Berechnungen bei Wahl anderer Startwerte oder einer anderen Anzeigegenauigkeit.

Beispiel 2

Nun wird das Einstiegsbeispiel von Seite 3 genauer untersucht.

Dort ist die Gleichung $\cos(u) - u \cdot \sin(u) = 0$ zu lösen.

Mit Blick auf das Newtonverfahren lässt sich das Problem als die Bestimmung der Nullstelle der Funktion

$f(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ interpretieren.

Für die Anwendung des Newtonverfahrens wird die 1. Ableitung von f benötigt:

$$f'(x) = -2 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x).$$

Damit ergibt sich als Rekursionsformel:

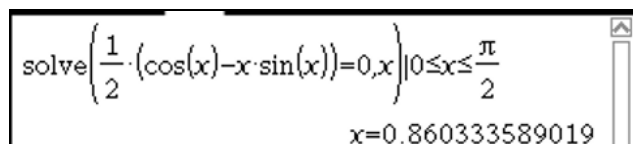
$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n \cdot \sin(x_n)}{-2 \cdot \sin(x_n) - x_n \cdot \cos(x_n)}$$

Oder etwas vereinfacht:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\cos(x_n) - x_n \cdot \sin(x_n)}{2 \cdot \sin(x_n) + x_n \cdot \cos(x_n)}$$

Diese Rekursion wird nun analog zum Beispiel 1 wieder in einer Tabellenkalkulation realisiert mit dem Startwert $x_0 = 0,5$:

Es zeigt sich eine Übereinstimmung mit der Lösung, die der CAS-Rechner „automatisch“ findet:



$$\text{solve}\left(\frac{1}{2} \cdot (\cos(x) - x \cdot \sin(x)) = 0, x \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

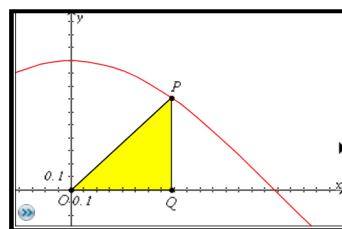
$$x = 0.860333589019$$

Die Lösung für das anfangs gestellte Problem lautet also: Das Dreieck OQP hat den maximalen Flächeninhalt für $u \approx 0,86$.

Außerdem ist damit nun der mathematische Hintergrund etwas erhellt, wie ein CAS Gleichungen löst, für die es kein direktes Lösungsverfahren gibt.

Neben dem Newton-Verfahren lassen sich z. B. noch das Intervallhalbierungsverfahren und das allgemeine Iterationsverfahren anwenden.

In der Software von Computeralgebrasystemen sind solche Näherungsverfahren implementiert.



	A	B	C	D
1		0	0.5	
2		1	0.95639	
3		2	0.862589	
4		3	0.860335	
5		4	0.860334	
6		5	0.860334	
7		6	0.860334	
8		7	0.860334	
9		8	0.860334	
10		9	0.860334	
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
B2		$= b1 + \frac{\cos(b1) - b1 \cdot \sin(b1)}{2 \cdot \sin(b1) + b1 \cdot \cos(b1)}$		

Übungsaufgaben

1. Beschreiben Sie für die Lösung der Gleichung $x + 1 = x^3 + 2x^2$ die Anwendung des Newtonverfahrens. Ermitteln Sie die Lösung auf sechs Dezimalen genau und vergleichen Sie diese mit der Lösung, die der CAS-Rechner mit dem Solve-Befehl berechnet.
2. Für die Berechnung von \sqrt{a} ($a > 0$) kann man die Iterationsvorschrift $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$ benutzen.
Zeigen Sie, dass es sich bei diesem nach dem Mathematiker HERON VON ALEXANDRIA³ benannten Verfahren um einen Spezialfall des Newtonverfahrens handelt.
3. Das Newtonverfahren konvergiert nicht für alle Funktionen und Startwerte. Stellen Sie einen solchen Fall graphisch dar.
4. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x) = 4x - x^4 + 4$ mit dem Newtonverfahren. Beschreiben Sie, wie Sie dabei vorgehen. Welcher Startwert muss ausgeschlossen werden? Begründen Sie.
5. Für folgende Sachverhalte führt die Anwendung des Newtonverfahrens nicht zum Erfolg:
 - (1) $f(x) = (1 - x) \cdot (x + 2)$ mit dem Startwert $x_0 = -0,5$,
 - (2) $f(x) = \ln(x)$ mit dem Startwert $x_0 = 3,9$.

Überzeugen Sie sich von dieser Aussage. Begründen Sie, weshalb das Newtonverfahren in diesen Fällen nicht realisiert werden kann.

³ Heron von Alexandria lebte vermutlich im 1. Jahrhundert und lehrte am Museion von Alexandria, das berühmt für seine Bibliothek war.

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Heron_von_Alexandria.



6. Der Algorithmus zum Newtonverfahren lässt sich auch über den Programm- oder Funktionseditor wie folgt realisieren.

<pre> newton 0/6 Define LibPub newton(s,e)= Func Local c,f,s,x c:=s f(x):=$\frac{d}{dx}(f(x))$ While f(c) >e c:=$c - \frac{f(c)}{fs(c)}$ EndWhile EndFunc </pre>	<pre> f(x):=x²-2 ▶ Fertig s:=3. ▶ 3. e:=1.E-5 ▶ 0.00001 newton(s,e) ▶ 1.41421 </pre>
--	---

Bei diesem Programm müssen beim Start zwei Zahlen s und e eingegeben werden. Im Beispiel sind s = 3 und e = 0,00001. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Zahlen.

Welche Bedeutung haben die Anweisungen „While $|f(c)| > e$ “ und „ $c := c - \frac{f(c)}{fs(c)}$ “?

Lösen Sie mit diesem Programm folgende Aufgaben.

- Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung $x = \cos(x)$ auf fünf Dezimalstellen genau.
- Berechnen Sie den größten Funktionswert der Funktion $f(x) = x \cdot \sin(x)$ im Intervall $[0; \pi]$ auf 6 Dezimalstellen genau.

Lösungshinweise für die „Aufgaben“ zum Grundprinzip des Newtonverfahrens
(Siehe Seite 5)

Aufgabe 1	Tangentengleichung in $P_2(x_2; f(x_2))$:	$y = -3,13888x + 4,46313$
	Nullstelle x_3 dieser Tangente:	$x_3 \approx 1,42189$
Aufgabe 2	Tangente an der Stelle $x_0 = -1$:	$y = 2x + 3$
	Nullstelle:	$x_1 = -1,5$
	Tangente an der Stelle $x_1 = -1,5$:	$y = 3x + 4,25$
	Nullstelle:	$x_2 = -1,41667$
	Tangente an der Stelle x_2 :	$y = 2,8334x + 4,00695$
	Nullstelle:	$x_3 = -1,41422$
Aufgabe 3	Die Tangente an der Stelle $x_0 = 0$ ist $y = 2$. Diese Tangente besitzt keine Nullstelle. Der Startwert ist für das Newtonverfahren ungeeignet.	

Lösungshinweise für „Der Algorithmus zum Newtonverfahren“ (Siehe Seite 6)

Stellen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 auf:

$y = m \cdot x + n$ mit $m = f'(x_0)$ und $y = f(x_0)$ ergibt sich:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + n \Rightarrow n = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Daraus ergibt sich als Tangentengleichung:

$$y = t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

$$y = t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Zeigen Sie, dass für die Nullstelle x_1 der Tangente gilt: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ mit $f'(x_0) \neq 0$:

Die Nullstelle der Tangente ist der neue Näherungswert x_1 :

Mit $t(x) = 0$ ergibt sich:

$$f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0) = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \text{ mit } f'(x_0) \neq 0$$

Legt man nun die Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_1 an, so ergibt sich analog für deren Nullstelle x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Setzt man das Verfahren fort, so erhält man stets den gleichen Zusammenhang zwischen zwei aufeinander folgenden Werten x_n und x_{n+1} . Er lässt sich durch folgende Vorschrift beschreiben:

Algorithmus zum Newtonschen Näherungsverfahren:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ mit } f'(x_n) \neq 0$$

Startwert x_0

Lösungshinweise für die „Aufgabe“ zum Beispiel 1 (Siehe Seite 7)

Der Startwert $x_0 = -1$ führt zu einem Näherungswert für die Nullstelle $-\sqrt{2}$.

Mit dem Startwert $x_0 = 0$ kann das Newtonverfahren nicht realisiert werden, weil die Tangente an den Graphen von $y = -x^2 + 2$ an dieser Stelle parallel zur x-Achse verläuft und deshalb keinen Schnittpunkt liefert.

Man erkennt außerdem, dass für $x_0 = 0$ der Nenner in der Rekursionsformel null wird.

	A	B	C
•			
1	1	-1	0
2	2	-1.5	#UNDEF
3	3	-1.41667	
4	4	-1.41422	
5	5	-1.41421	
6	6	-1.41421	
7	7	-1.41421	
8	8	-1.41421	
9	9	-1.41421	
10	10	-1.41421	
11	11	-1.41421	
	$C2 = \frac{c1^2 + 2}{2 \cdot c1}$		

Wählt man die Startwerte weiter entfernt von den gesuchten Nullstellen, braucht das Newtonverfahren in diesem Beispiel mehr Schritte bis sich die Näherungswerte für die Nullstellen stabilisieren. Eine Erhöhung der angezeigten Ziffern von z. B. „Fließ 6“ auf „Fließ 12“ ändert hier beim Arbeiten in der Tabellenkalkulation jedoch nichts am „Stabilisierungsverhalten“ des Newtonverfahrens. Das liegt daran, dass der Rechner intern immer mit allen verfügbaren Stellen rechnet.

	A	B	C	D
•				
1	1	-1	-100	1000
2	2	-1.5	-50.01	500.001
3	3	-1.41667	-25.025	250.002
4	4	-1.41422	-12.5525	125.005
5	5	-1.41421	-6.35589	62.5106
6	6	-1.41421	-3.33528	31.2713
7	7	-1.41421	-1.96747	15.6676
8	8	-1.41421	-1.492	7.89764
9	9	-1.41421	-1.41624	4.07544
10	10	-1.41421	-1.41422	2.28309
11	11	-1.41421	-1.41421	1.57955
	$C2 = \frac{c1^2 + 2}{2 \cdot c1}$			

	A	B	C	D	E
•					
1	1	-1	-100	1000	
2	2	-1.5	-50.01	500.001	
3	3	-1.41666666667	-25.0249960008	250.002499996	
4	4	-1.41421568627	-12.5524580467	125.005249958	
5	5	-1.41421356237	-6.35589469493	62.510624643	
6	6	-1.41421356237	-3.33528160928	31.2713096021	
7	7	-1.41421356237	-1.96746556223	15.6676329949	
8	8	-1.41421356237	-1.49200088969	7.89764234786	
9	9	-1.41421356237	-1.41624133204	4.07544124052	
10	10	-1.41421356237	-1.41421501405	2.28309282439	
11	11	-1.41421356237	-1.41421356237	1.57954875241	
	$D2 = \frac{d1^2 + 2}{2 \cdot d1}$				



Lösungshinweise für die „Übungsaufgaben“ (Siehe Seiten 9, 10)

Aufgabe 1				
	nr	wert1	wert2	wert3
1	0	0.5000000	-0.6000000	-2.5000000
2	1	1.0000000	-0.5551724	-2.2903226
3	2	0.8333333	-0.5549581	-2.2486062
4	3	0.8029350	-0.5549581	-2.2469820
5	4	0.8019388	-0.5549581	-2.2469796
6	5	0.8019377	-0.5549581	-2.2469796
7	6	0.8019377	-0.5549581	-2.2469796
8	7	0.8019377	-0.5549581	-2.2469796
9	8	0.8019377	-0.5549581	-2.2469796
10	9	0.8019377	-0.5549581	-2.2469796
11				

B2	$=b1 - \frac{b1^3 + 2 \cdot b1^2 - b1 - 1}{3 \cdot b1^2 + 4 \cdot b1 - 1}$
----	--

$$\text{solve}(x+1=x^3+2 \cdot x^2, x) \quad x=-2.2469796 \text{ or } x=-0.5549581 \text{ or } x=0.8019377$$

Nimmt man eine Einstellung der Rechnergenauigkeit auf **Fix 7** vor, dann ist die siebente Nachkommastelle gerundet, die anderen sind genau.

Aufgabe 2	
$f(x) = x^2 - a \rightarrow f'(x) = 2x$	
Newton: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2 \cdot x_n} = \frac{2 \cdot x_n^2 - x_n^2 + a}{2 \cdot x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2 \cdot x_n} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$ (Heron)	

Aufgabe 3	
z. B.:	

Aufgabe 4

Beschreibung der Arbeitsschritte siehe Text Seite 7

nr	wert1	wert2	wert3	E	F	G	H
1	0	2	-2	1			
2	1	1.85714	-1.44444	-			
3	2	1.83555	-1.06257	-			
4	3	1.83509	-0.889246	-			
5	4	1.83509	-0.86249	-			
6	5	1.83509	-0.861983	-			
7	6	1.83509	-0.861983	-			
8	7	1.83509	-0.861983	-			
9	8	1.83509	-0.861983	-			
10	9	1.83509	-0.861983	-			
11							

B2 = $b1 - \frac{4 \cdot b1 - b1^4 + 4}{4 - 4 \cdot b1^3}$

Ausgeschlossen werden muss der Startwert $x_0 = 1$, weil die Funktion dort ein lokales Maximum hat und demzufolge eine waagerechte Tangente vorliegt.

Aufgabe 5

$f(x) = (1-x) \cdot (x+2) = -x^2 - x + 2$ mit Startwert $x_0 = -0,5$

$f'(x) = -2x - 1$ liefert für $x_0 = -0,5$ den Wert null \rightarrow Division durch null!

$f(x) = \ln(x)$ mit Startwert $x_0 = 3,9$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 3,9$ hat die Gleichung

$y \approx 0,25641x + 0,360977$. Diese Tangente hat die Nullstelle $x_1 \approx -1,408 < 0$.

Weil diese Stelle außerhalb des Definitionsbereichs von f liegt, kann das Verfahren nicht fortgesetzt werden.

Aufgabe 6

Die Variable s entspricht dem Startwert. Die Variable e beschreibt die gewünschte Genauigkeit für den Funktionswert des Näherungswertes der gesuchten Nullstelle:

Hinter der Anweisung „While $|f(c)| > e$ “ verbirgt sich die Abbruchbedingung für das Verfahren, d. h., solange der Abstand des Funktionswertes an der Stelle c vom Wert null größer ist als die gewünschte Genauigkeit e für den Funktionswert, wird auf den zugehörigen Wert c die Rekursionsformel des Newtonverfahrens angewendet, um damit einen besseren Näherungswert für c zu finden.

Die Struktur der Anweisung „ $c := c - \frac{f(c)}{fs(c)}$ “ entspricht der Struktur der

Rekursionsformel für das Newtonverfahren, d. h. „ c “ auf der rechten Seite der Gleichung entspricht x_{n+1} und „ c “ auf der linken Seite der Gleichung entspricht x_n . Demzufolge steht „ $f(c)$ “ für den Wert $f(x_n)$ und „ $fs(c)$ “ den Wert $f'(x_n)$.

Aufgabe 6

a)

"newton" erfolgreich gespeichert	$f(x) := x - \cos(x)$	Fertig
Define LibPub newton (s,e)=	s:=0.5	0.5
Func	e:=1. E-5	0.00001
Local c,f,s,x	newton (s,e)	0.739142
c:=s		
$f_s(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$		
While $ f(c) > e$		
$c := c - \frac{f(c)}{f_s(c)}$		
EndWhile		
EndFunc		

b)

"newton" erfolgreich gespeichert	$f(x) := \frac{d}{dx}(x \sin(x))$	Fertig
Define LibPub newton (s,e)=	s:=2.	2.
Func	e:=1. E-6	0.000001
Local c,f,s,x	newton (s,e)	2.028758
c:=s		
$f_s(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$		
While $ f(c) > e$		
$c := c - \frac{f(c)}{f_s(c)}$		
EndWhile		
EndFunc		

