Thüringer Lehrerinnen und Lehrer der DZLM-Gruppe haben im Folgenden Erfahrungen, Anmerkungen und Empfehlungen zur Dokumentation von Lösungen bei Verwendung von digitalen Werkzeugen zusammengefasst.

1 Erfahrungen und Anmerkungen aus einer Umfrage in einer Fortbildung

Ich würde mich wieder für einen Unterricht mit
dem CAS-Taschenrechner entscheiden: ja ☒ nein ☐

Begründung: - Unterricht wird anschaulicher
↳ besser verständlich
- CAS verkürzt Lösungsverfahren
↳ spart Schreibarbeit

Was ich noch sagen wollte:
Dennoch bin ich der Meinung, das der CAS in den naturwissenschaftlichen Fächern (außer Mathe) ZU WENIG(!) eingesetzt wird.
Die Möglichkeiten, die dieses Gerät bietet, werden nicht ausgeschöpft.
(mit Ausnahme: Mathe)

Wenn ich mit dem CAS rechne schreibe ich meistens nichts auf, ich speicher meistens die Dokumente und wenn Aufgaben verglichen werden lese ich dort die Ergebnisse ~~an~~ ab.

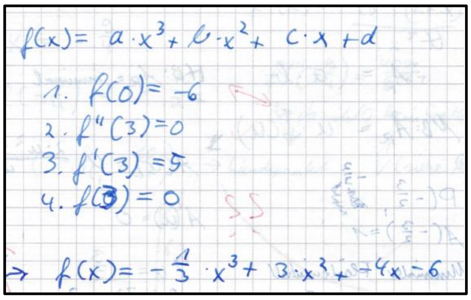
Zugegeben, dies ist eine extreme Auffassung. Sie macht aber das Problem deutlich, das entsteht, wenn Schülerinnen und Schüler im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht mit digitalen Werkzeugen, z. B. dem TI-NspireCAS, dem ClassPad oder Geogebra arbeiten.

Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien Bad Berka
Beate Arand, Ralph Huste, Thomas Kurze, Dr. Hubert Langlotz, Dr. Matthias Müller, Antje Schwob, Dr. Wilfried Zappe
Februar 2015

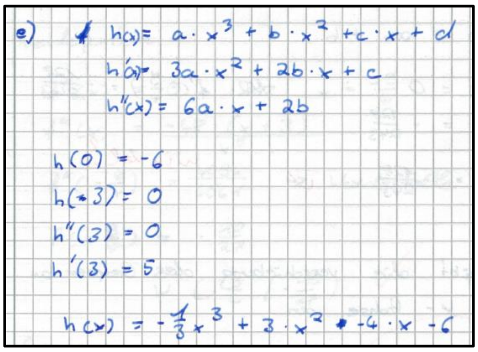
2 Beispiele mit Kommentaren

Beispiel 1: Für welche ganzrationale Funktion 3. Grades $y = h(x)$ ist $h(0) = -6$, die Nullstelle $x_1 = 3$ gleichzeitig Wendestelle und der Anstieg der Wendetangente 5?

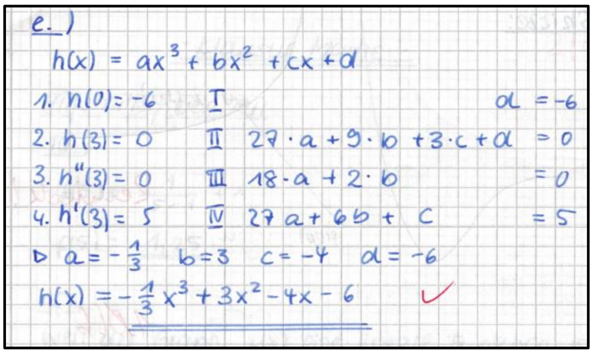
Schülerlösung 1:



Schülerlösung 2:



Schülerlösung 3:

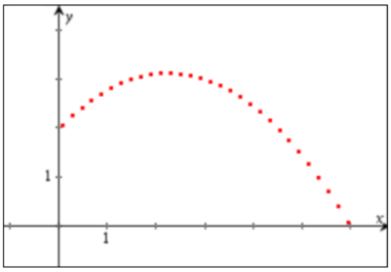


Kommentar:

Wir stellen zunächst fest, dass in der Aufgabenstellung ein geeigneter Operator fehlt. Daher sind alle drei Schülerlösungen u. E. zulässig.
Wir halten die Schülerlösung 1 für geeignet, da sie neben dem mathematischen Modell auch die vier Bedingungen richtig in die Fachsprache übersetzt und das richtige Ergebnis wiedergibt. Häufig ist es sinnvoll, auch die Terme der Ableitungsfunktionen anzugeben, weil sich so besser auf Schülerfehler schließen lässt. Dies ist in der Schülerlösung 2 gemacht worden. Mitunter wird man die Dokumentation der Ableitungsterme nicht verlangen können, etwa wenn diese sehr umfangreich sind. In der Schülerlösung 3 sind die Ableitungsterme indirekt in den Gleichungen des angegebenen Systems erkennbar.

Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien Bad Berka
Beate Arand, Ralph Huste, Thomas Kurze, Dr. Hubert Langlotz, Dr. Matthias Müller, Antje Schwob, Dr. Wilfried Zappe
Februar 2015

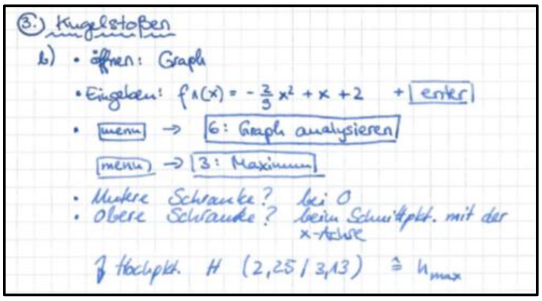
Beispiel 2: Diese Aufgabe ist ein Ausschnitt aus einer im Original umfangreicheren Aufgabenstellung, in der u. a. die Gleichung der Flugbahn ermittelt werden sollte.



Ermittle die maximale Höhe der Kugel über dem Erdboden.

$$f(x) = \frac{-2}{9}x^2 + x + 2$$

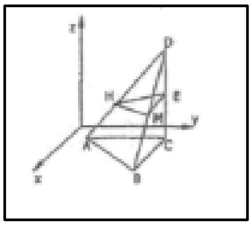
Schülerlösung:



Kommentar:

Es gibt immer wieder Schülerlösungen, in denen die Menüführung sehr ausführlich beschrieben wird, wie in der hier angegebenen Schülerlösung. Wir halten das für zulässig, wenn der Schüler die entsprechenden Tastenfolgen und Befehle gerade erst kennengelernt hat und das Aufschreiben der Tastenfolgen den Lernprozess im Umgang mit dem Rechner befördern kann. Im Laufe der Zeit wird aber diese Notation immer weniger notwendig sein. Vor allem in Leistungsfeststellungen sollte darauf orientiert werden, zunehmend die mathematische Fachsprache zu verwenden.

Beispiel 3: Die Punkte A(3 | 1 | 1), B(9 | 7 | 1), C(3 | 7 | 1) und D(3 | 7 | 7) sind Eckpunkte einer dreiseitigen schiefen Pyramide. Weise nach, dass $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ und $\overline{DC}$ paarweise orthogonal und gleich lang sind.



Schülerlösung:

Kommentar:

Neben fachlichen Fehlern enthält diese Schülerlösung auch zahlreiche Ungenauigkeiten in der Verwendung der Fachsprache. Die Nachvollziehbarkeit der Lösung lässt sehr zu wünschen übrig. Aus der Schülerlösung geht hervor, dass - wie hier bei der Winkelberechnung - die Verwendung der Kurzform mit Variablen durchaus sinnvoll sein kann. Dazu sollte aber zunächst dokumentiert werden, welche Koordinaten die einzelnen Vektoren haben.

Beispiel 4: Gegeben sind die Punkte A(1 | -2 | 3), B(-3 | 4 | 5), C(-1 | 2 | -3) und D(7-2√2 | -10+4√2 | -7-6√2).
Untersuchen Sie, ob sich die Geraden AB und CD schneiden.
Berechnen Sie gegebenenfalls die exakten Koordinaten des Schnittpunktes und bestimmen Sie den Schnittwinkel im Gradmaß mit vier zuverlässigen Ziffern.

Schülerlösung 1:

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{CD}$

$g_{AB}(t) = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}$

$k_{CD}(r) = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}8-2\cdot\sqrt{2}\\4\cdot\sqrt{2}-12\\-6\cdot\sqrt{2}-4\end{pmatrix}$

$g(t) = k(r)$
$\hookrightarrow r = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $\quad \rightarrow$ Schnittpunkt $S(1-4\cdot\sqrt{2};\ 6\cdot\sqrt{2}-2;\ 2\cdot\sqrt{2}+3)$
$t = \sqrt{2}$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}8-2\cdot\sqrt{2}\\4\sqrt{2}-12\\-6\sqrt{2}-4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}8-2\sqrt{2}\\4\sqrt{2}-12\\-6\sqrt{2}-4\end{pmatrix}\right|}$$

$\cancel{\cos}\ \alpha = 138{,}536°$

Schülerlösung 2:

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{CD} = \begin{pmatrix}8-2\cdot\sqrt{2}\\4\cdot\sqrt{2}-12\\-6\cdot\sqrt{2}-4\end{pmatrix}$

Schnittwinkel:

$\frac{\text{dotp}(b-a,\ d-c)}{\text{norm}(b-a)\cdot\text{norm}(d-c)}$

$g_1(t) = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\cdot t\cdot\begin{pmatrix}-4\\6\\2\end{pmatrix}$

$g_2(t) = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot t\cdot\begin{pmatrix}8-2\cdot\sqrt{2}\\4\cdot\sqrt{2}\cdot 12\\6\cdot\sqrt{2}-4\end{pmatrix}$

$\cos^{-1}(-0{,}749366) = 0{,}749366$

$\sin^{-1} \rightarrow 48{,}5355°$

$g_1(t) = g_2(t)$ = Schnittpkt → Dimensionsfehler

Kommentar:

Schülerlösung 1 enthält im Wesentlichen alles, was man von einer Dokumentation erwarten kann. Insbesondere gibt es keinen direkten Bezug auf die Verwendung des CAS.
In der Schülerlösung 2 gibt es eine Vermischung von Rechner- und Fachsprache. Fachliche Fehler und nicht sachgerechtes Verwenden der Parameter in den Geradengleichungen verhindern eine richtige Lösung der Aufgabe.

Beispiel 5: Die Aufgabe beinhaltet einen Onlineartikel, in dem beschrieben wird, dass ein Hund immer den kürzesten Weg zu seinem Spielgerät findet. Das Spielgerät schwimmt im Wasser und der Hund rennt solange am Strand entlang, bis er abbiegt und schwimmt. Natürlich ist er an Land schneller als im Wasser und irgendwie wählt er immer den optimalen Zeitpunkt beim Abbiegen, um möglichst schnell bei seinem Spielgerät anzukommen. Eigentlich ist das ein Extremwertproblem, aber kann der Hund wirklich differenzieren? Die Aufgabe ist es, den Punkt zu ermitteln, an dem der Hund den Strand verlassen müsste, um zum Spielgerät zu schwimmen.

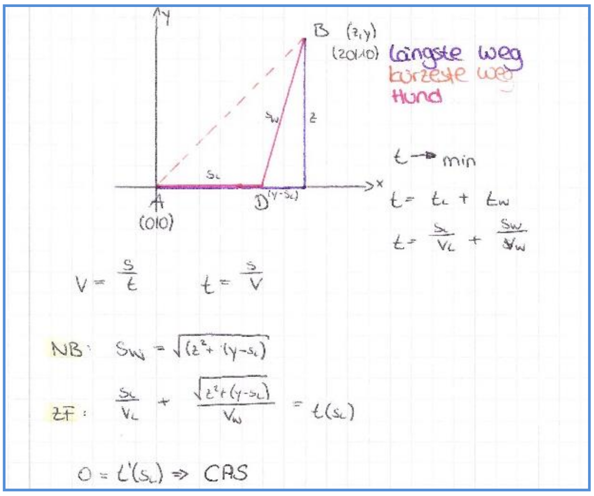
Onlineartikel:

Hund als Mathegenie: Pi mal Pfote
Von Holger Dambeck

Affen tun es, Papageien, Bienen und Ratten sowieso: Sie können zählen und sogar rechnen. Eine Fähigkeit, die ihnen Vorteile bringt, etwa bei der Futtersuche. Zwerghund Elvis scheint sogar Funktionen ableiten zu können - sein Herrchen, ein Mathelehrer, ist begeistert.

www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/hund-als-mathegenie-pi-mal-pfote-a-811138.html

Teil der Schülerlösung:



Kommentar:

Der Lösungsansatz ist durch die Verwendung der Fachsprache, obwohl eine Ungenauigkeit vorliegt, gut nachvollziehbar. Die weitere Lösung ist hier aus Platzgründen nicht dargestellt. Wir wollen aber darauf verweisen, dass der Hinweis auf die Verwendung des CAS in der letzten Zeile eine gute Möglichkeit für die Nachvollziehbarkeit des Lösungsweges ist.

Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien Bad Berka
Beate Arand, Ralph Huste, Thomas Kurze, Dr. Hubert Langlotz, Dr. Matthias Müller, Antje Schwob, Dr. Wilfried Zappe
Februar 2015

Beispiel 6 (aus dem Abitur Thüringen 2014):
Herr Meyer möchte das Dach seines Einfamilienhauses neu eindecken. Bei einem Angebot sichert der Verkäufer zu, dass nur etwa ein Prozent der Ziegel unbrauchbar ist.
Die Ziegel werden auf Paletten geliefert. Auf einer Palette sind 8 Pakete mit je 36 Ziegeln.
Ermitteln Sie die Mindestanzahl der Ziegel, die geprüft werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens zwei unbrauchbare Ziegel dabei sind.

binomcdf (450, 0.01, 2, 450) = 0,9398
binomcdf (460, 0.01, 2, 460) = 0,9445
binomcdf (470, 0.01, 2, 470) = 0,9489
binomcdf (472, 0.01, 2, 472) = 0,9498
binomcdf (473, 0.01, 2, 473) = 0,9502

⇓ es müssen mindestens 473 Ziegel kontrolliert werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens 2 unbrauchbare Ziegel zu erhalten

Kommentar:

Durch die Verwendung digitaler Werkzeuge sind Aufgabenstellungen möglich, die so vorher für Schüler mit den bisherigen Werkzeugen kaum oder gar nicht realisierbar waren. Hier ist eine Lösung erkennbar, die systematisches Probieren dokumentiert, was wir für zulässig halten. Allerdings wird der Rechnerbefehl „binomCdf“ zur Dokumentation verwendet. Dass es auch andere Dokumentationsbeispiele gibt, wird im nächsten Beispiel gezeigt.

Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien Bad Berka
Beate Arand, Ralph Huste, Thomas Kurze, Dr. Hubert Langlotz, Dr. Matthias Müller, Antje Schwob, Dr. Wilfried Zappe
Februar 2015

Beispiel 7: Bei einer großen Verlosung gewinnen 10 % aller Lose.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zwanzig Losen mindestens ein Gewinn enthalten ist.

Schülerlösung:

p – Gewinnwahrscheinlichkeit $= 0{,}1$

X – Anzahl Gewinne

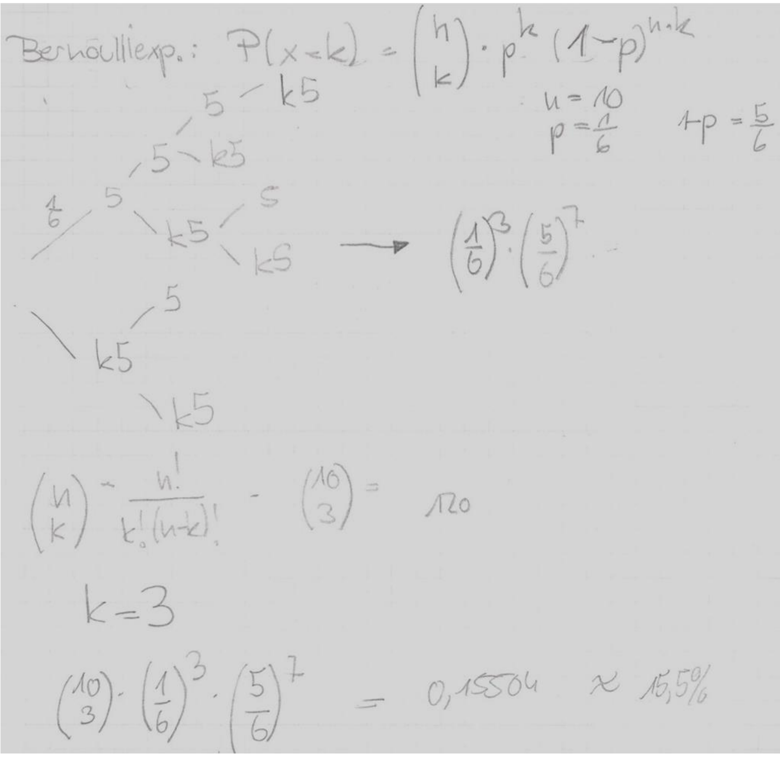
a) $P_{0,1}^{20}(X \geq 1) = 1 - P_{0,1}^{20}(X=0) = 1-(1-0{,}1)^{20} = 1-0{,}9^{20} \approx \underline{\underline{0{,}8784}}$

Kommentar:

Auch ohne Verwendung des Rechnerbefehls ist eine sachgerechte Dokumentation möglich.

Beispiel 8: Im Film „Fluch der Karibik 2“ wird das Spiel „Würfelpoker“ vorgestellt. Die Filmszene motiviert die Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass genau 3 von 10 Würfeln eine Fünf zeigen.

Schülerlösung 1:



Schülerlösung 2:

$$P(x) = k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n! \cdot (n-k)!} \qquad \cancel{\binom{3}{10}} \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \underline{\underline{120}}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot 120 = 5\%$$

$$\text{binomPdF}\left(10, \frac{1}{6}, 3\right) = 0{,}15504$$

Kommentar:

Beide Schüler waren bemüht, den Lösungsweg möglichst ausführlich zu dokumentieren. Wie bereits im Beispiel 7 erwähnt, wird auch in der Schülerlösung 1 deutlich, dass Rechnerbefehle nicht notwendig für die Nachvollziehbarkeit eines Lösungsweges sind. In Schülerlösung 2 wurde die gesuchte Wahrscheinlichkeit auf zwei Arten berechnet. Es ist interessant, dass der Schüler die unterschiedlichen Ergebnisse nicht weiter kommentiert. An dieser Stelle wird deutlich, dass leistungsschwächere Schüler im Zweifel auf die Rechnersprache (und damit auf die entsprechenden Befehle) für die Dokumentation des Lösungsweges zurückgreifen. Leistungsstärkere Schüler fühlen sich vermutlich sicher beim Umgang mit der mathematischen Fachsprache.

3 Zusammenfassung und Empfehlungen

Abgesehen von eventuellen fachlichen Unzulänglichkeiten kann man i. A. feststellen:

- Die Dokumentation fällt häufig zu knapp aus.
- Zusammenhänge werden nicht ausreichend erläutert, sodass der Lösungsweg schlecht nachvollziehbar ist.
- Mathematischer Formalismus und Rechnersprache werden vermischt.
  Oft ersetzt die Rechnersprache die mathematische Fachsprache.

Eine wichtige Orientierung für die Dokumentation lässt sich den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife entnehmen:

„Für die Beurteilung der Prüfungsleistungen sind sowohl die rein formale Lösung als auch das zum Ausdruck gebrachte mathematische Verständnis maßgebend.
Daher sind erläuternde, kommentierende und begründende Texte unverzichtbare Bestandteile der Prüfungsleistung. Dies gilt auch für die Dokumentation des Einsatzes elektronischer Werkzeuge. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten.“[1]

[1] Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, 18.10.2012 , S.30

Es muss gezielt Transparenz für alle Beteiligten geschaffen werden, welche Art von Sprache im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht erwartet wird und welche erlaubt ist.

Was kann der Lehrer tun, um diese Ziele zu erreichen?

Aufgabenauswahl und Aufgabenformulierung	**Pädagogisch-psychologische Maßnahmen**
Lern- und Leistungsaufgaben unterscheiden	Gewohnheiten ausprägen
selbstdifferenzierende Aufgaben einsetzen	Vorbild sein
Operatoren gezielt verwenden	

Für die Ausprägung von Gewohnheiten sind folgende Aspekte von Bedeutung:

– Motivierung
– Organisation und Bewusstmachen geeigneter Handlungen
– Übungen zur Festigung der Handlungen

Motivierende Ansätze können z. B. sein:

Die gelungene Dokumentation einer Lösung ist

- nützlich für mich
  - Nachlesbar für spätere Zwecke, z. B. Prüfungsvorbereitung
  - Habe ich es wirklich verstanden?

Können andere mich verstehen?

- Andere (Mitschüler, Lehrer, Eltern) können mir besser helfen.
- nützlich für andere, z. B. Mitschüler, Lehrer, Eltern
  - Transparenz
  - Bewertung
- ästhetisch
  - Sieht einfach besser aus!

Die Organisation und das Bewusstmachen geeigneter Handlungen kann man z. B. initiieren, wenn klare Forderungen zur Dokumentation gestellt werden:

> *Die Nachvollziehbarkeit der Lösungen muss auf geeignete Art und Weise gewährleistet sein, z. B. durch Angabe der Lösungsidee in Stichpunkten oder Skizzen, Zwischenergebnisse, erläuternde, kommentierende oder begründende Texte.*

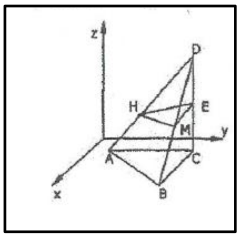
Übungen zur Festigung der Handlungen können sein:

- Forderung nach hinreichender Dokumentation zu jeder HA, Übung oder LK.
- Positive und negative Beispiele besprechen.
- Sich als Lehrer nicht nur mit dem Ergebnis einer Aufgabe zufrieden geben.
- Sanktionieren!
- Vorbild sein!

Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien Bad Berka
Beate Arand, Ralph Huste, Thomas Kurze, Dr. Hubert Langlotz, Dr. Matthias Müller,
Antje Schwob, Dr. Wilfried Zappe
Februar 2015

Am Beispiel 3 von Seite 4 wollen wir einige Überlegungen zur Aufgabenauswahl und Aufgabenformulierung darstellen.

Die ursprüngliche Aufgabenstellung war:



Die Punkte A(3 | 1 | 1), B(9 | 7 | 1), C(3 | 7 | 1) und D(3 | 7 | 7) sind Eckpunkte einer dreiseitigen schiefen Pyramide. Weise nach, dass $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ und $\overline{DC}$ paarweise orthogonal und gleich lang sind.

Schaut man sich die Koordinatendarstellungen der Vektoren an, so ist zu erkennen, dass diese Aufgabe gar keinen CAS-Einsatz erfordert.

A(3; 1; 1), B(9; 7; 1), C(3; 7; 1), D(3; 7; 7)

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

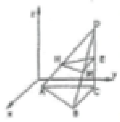
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} = 0$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} = 0$$

$$|\overrightarrow{AC}| = 6\,LE,\ |\overrightarrow{BC}| = 6\,LE,\ |\overrightarrow{CD}| = 6\,LE$$

Durch eine kleine Veränderung könnte man bereits einen anderen Anreiz für die Problemstellung schaffen:

A(3; 1; 1), B(9; 7; 1), C(3; 7; 1) und D(3; 7; 7) sind Eckpunkte einer dreiseitigen schiefen Pyramide:



~~Weise nach, dass~~
Überprüfe, ob ...
Erkläre, warum ...
$\overline{AC}$, $\overline{BC}$ und $\overline{DC}$ paarweise orthogonal und gleich lang sind.

Oder:

~~A(3; 1; 1), B(9; 7; 1), C(3; 7; 1) und D(3; 7; 7)~~
A(1; 1; 1), B(3; 3; 0), C(2; 5; 2) und F(5; 2; 2)
sind Eckpunkte einer dreiseitigen schiefen Pyramide.

Begründen Sie, dass $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ *und* $\overrightarrow{BF}$ die Kanten eines Würfels aufspannen.

Fazit:

- Man muss sich klar machen, welche Kompetenzen Gegenstand der Aufgabe werden sollen (Lehrplan).
- Aufgaben so formulieren, dass für den Schüler transparent ist, welche Leistungen von ihm erwartet werden.
- Operatoren eventuell „untersetzen“ durch klärende Ergänzungen.
- Aufgaben „CAS-gerecht“ entwickeln und den Bewertungsmaßstab anpassen.
- Die Anforderungen an die Lösungsdokumentation zum Gegenstand des Unterrichts machen, ständig einfordern, langfristig üben und v. a. positiv sanktionieren.
- Die zu einer ordentlichen Lösungsdokumentation benötigte Zeit bei der Planung des Umfangs der Arbeit berücksichtigen.

„Der Computer zwingt uns zum Nachdenken über Dinge, über die wir auch ohne Computer schon lange hätten nachdenken müssen.“ (Hans Schupp)

Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien Bad Berka
Beate Arand, Ralph Huste, Thomas Kurze, Dr. Hubert Langlotz, Dr. Matthias Müller, Antje Schwob, Dr. Wilfried Zappe
Februar 2015