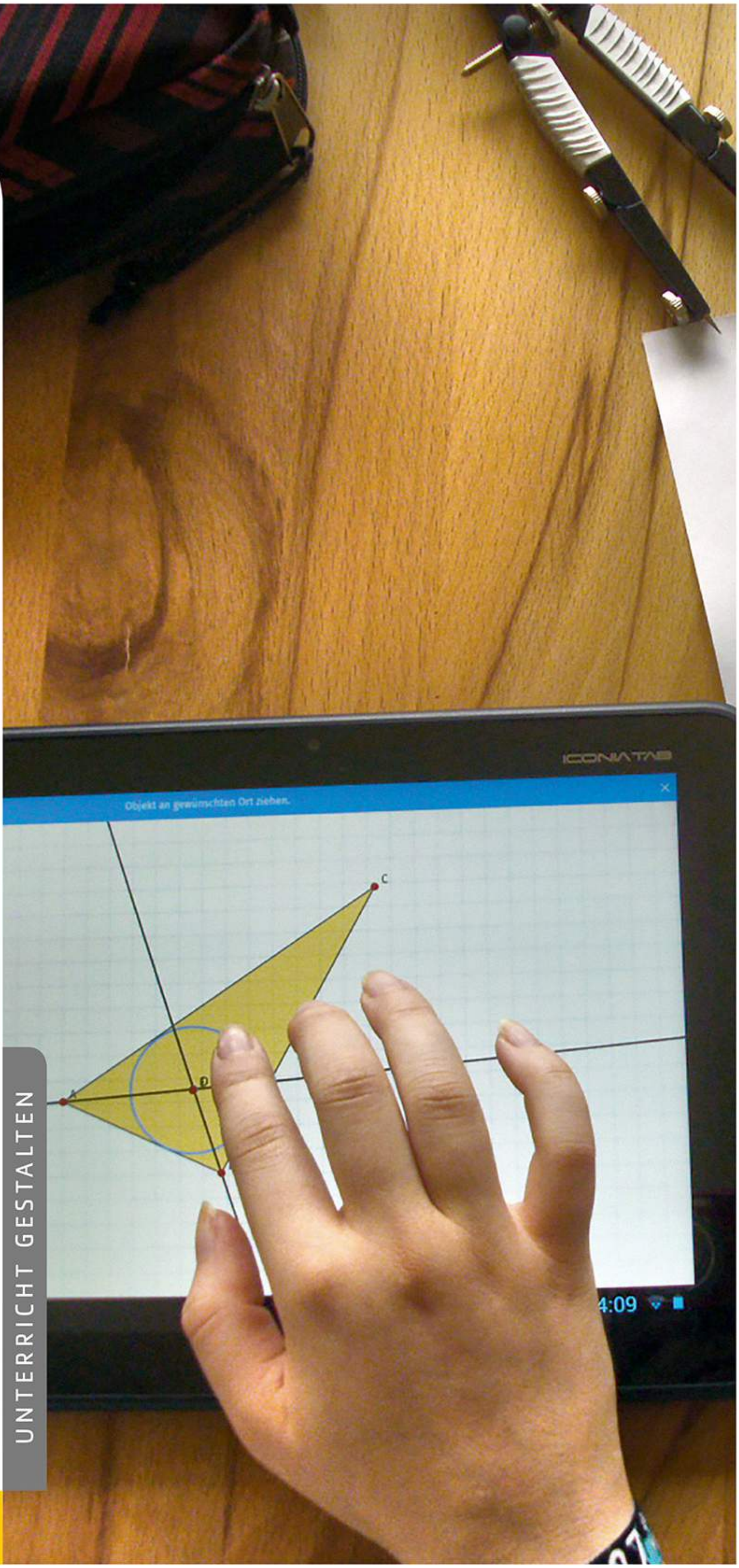
MINTec

Das nationale
Excellence-Schulnetzwerk

Werner Heubeck und Edgar Höniger

Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche auf dem Tablet – sketchometry im Unterricht

UNTERRICHT GESTALTEN



MINT-EC-Schriftenreihe

Willkommen beim Netzwerk mathematisch-naturwissenschaftlicher Schulen Deutschlands!

Der Verein MINT-EC ist eine Initiative der Wirtschaft zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlicher Schulen mit Sekundarstufe II und zur Qualifizierung von MINT-Nachwuchskräften in Deutschland. Wir sind aktiv für die Sicherung des MINT-Nachwuchses in Wirtschaft und Wissenschaft.

Unseren Netzwerkschulen bieten wir ein breites Angebot für Schülerinnen und Schüler, für Lehrkräfte und für die Schulleitungen. Der Zugang zum MINT-EC-Netzwerk ist über ein bundesweit einmaliges Auswahlverfahren möglich, das Qualität und Quantität der MINT-Angebote der Schulen prüft und dabei höchste Standards ansetzt.

Der Verein MINT-EC ist eine gemeinnützige Institution, die der excellenten MINT-Bildung an Schulen mit Sekundarstufe II dient. In Kooperationen mit Partnern aus Schule, Wirtschaft und Wissenschaft entwickeln wir innovative und bedarfsgerechte Maßnahmen und Angebote für unsere MINT-EC-Schulen.

Zu dieser Schriftenreihe:

Beiträge und Resultate aus den vielfältigen Aktivitäten des nationalen Excellence-Netzwerks MINT-EC und seiner Netzwerkschulen werden in dieser Schriftenreihe zusammengeführt und veröffentlicht.
In verschiedenen Themenclustern erarbeiten MINT-EC-Lehrkräfte und Schulleitungen Schul- und Unterrichtskonzepte, entwickeln diese weiter und nehmen dabei neue Impulse aus Wissenschaft und Forschung und aus aktuellen Herausforderungen der schulischen Praxis auf.
Aus Kooperationen des MINT-EC und seiner Schulen mit wissenschaftlichen Einrichtungen und Unternehmen entstehen ebenfalls Anregungen für Schulen, die ihre Schülerinnen und Schüler für MINT begeistern wollen.

Diese Schriftenreihe nimmt drei wesentliche Aktionsfelder in den Blick, denen die einzelnen Publikationen zugeordnet werden:

- Schule entwickeln
- Unterricht gestalten
- Talente fördern

Kommentare und Anregungen senden Sie gern an:
info@mint-ec.de

Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche auf dem Tablet – sketchometry im Unterricht

MINTec
Das nationale Excellence-Schulnetzwerk

Vorwort

Mobiles Lernen mit Tablets

Schülerinnen und Schüler sollten möglichst oft mit dynamischer Mathematiksoftware im Unterricht arbeiten. Diese Wunschvorstellung lässt sich bisher allerdings kaum realisieren. Schulen steht meist nur eine begrenzte Anzahl von Computerarbeitsplätzen zur Verfügung und die Reservierung eines Computerraums erfordert eine genaue Vorausplanung, die nicht immer geleistet werden kann. Zudem ist beispielsweise ein situationsbedingter spontaner Einsatz einer dynamischen Veranschaulichung oftmals nicht möglich. Auch Notebook-Klassen brachten bislang nicht den erhofften Durchbruch. Tablets erleichtern künftig das Lehren und Lernen. Wie der Taschenrechner haben diese Geräte eher die Funktion eines Werkzeugs. Sie passen auf jeden Schülerarbeitsplatz und sind sofort einsatzbereit. Die o.g. Hemmnisse spielen hier keine Rolle. Die Lehrperson muss sich um keine organisatorischen Details mehr kümmern und kann sich auf ihr Kerngeschäft, das Unterrichten, konzentrieren. Auch ein zeitlich kurzer bzw. ein spontaner Einsatz der Geräte ist möglich und sinnvoll. Mit der entsprechenden Hardwareausstattung allein verbessert sich allerdings die Unterrichtssituation nicht. Um alle Vorteile dieser mobilen Geräte nutzen zu können, benötigen wir geeignete Software, dazugehörige Unterrichtskonzepte sowie entsprechende Arbeitsmaterialien.

sketchometry – Geometrie mit dem Finger

Daher wurde am Lehrstuhl für Mathematik und Didaktik bzw. der Forschungsstelle für *Mobiles Lernen mit digitalen Medien* der Universität Bayreuth das Programm **sketchometry** **http://sketchometry.org** entwickelt. Dessen innovatives Bedienkonzept mit Sketch- und Gestensteuerung nutzt die Vorteile einer Touchbedienung umfassend aus und ermöglicht schülergerechtes unmittelbares Konstruieren. Die Software ist nicht menüorientiert, lediglich durch Skizzieren mit dem Finger entstehen geometrische Objekte bzw. Konstruktionen. Konfigurationen lassen sich mit einem oder zwei Fingern verändern, verschieben bzw. drehen. Für grundlegende Konstruktionen wie beispielsweise Mittelpunkt einer Strecke, Tangente oder Senkrechte gibt es intuitive Gesten.

Natürlich lässt sich **sketchometry** auch auf elektronischen Tafeln, Smartphones und PCs (hier mit der Maus statt dem Finger) nutzen. Vorteilhaft ist das identische Erscheinungsbild der Software auf allen diesen Geräten. Es gibt Apps für Android, iOS und firefoxOS.

Die Entwicklung von **sketchometry** wird ermöglicht durch die großzügige Unterstützung durch think ING. **http://www.think-ing.de**.

Unterrichtsmaterialien für die Sekundarstufe I

Der Einsatz von Tablets mit der gestengesteuerten Software **sketchometry** ermöglicht ein verändertes Vorgehen im Geometrieunterricht. Schülerinnen und Schüler lassen sich unmittelbar zu forschend-entdeckendem Lernen anregen. Sie können am Tablet experimentieren und beobachten und so geometrische Zusammenhänge bzw. Gesetzmäßigkeiten entdecken. Erleichtert wird ein solches Unterrichten durch entsprechend aufbereitete Materialien. Das vorliegende Heft bietet eine Fülle von Anregungen für den Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I. Entwickelt wurden die Arbeitsblätter und Unterrichtvorschläge von Edgar Höniger und Werner Heubeck, zwei sehr erfahrenen Realschullehrern. Beide freuen sich auf Rückmeldungen sowie auf ergänzende Vorschläge.

Peter Baptist
Universität Bayreuth

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Grundkenntnisse

- Der solide Umgang mit Zirkel und Lineal

Grundwissen

- Die Konstruktion der Mittelsenkrechten
- Die Konstruktion der Winkelhalbierenden

Vereinbarungen

- Unter der kürzesten Entfernung zweier Punkte A und B versteht man die *Länge der Strecke [AB]*.
- Unter allen Entfernungen eines Punktes P zu einer Geraden g gibt es eine kürzeste. Diese kürzeste Entfernung heißt *Abstand des Punktes P von der Geraden g*.

Hinweise

- In einer älteren Version von sketchometry wir die Länge einer Strecke [AB] mit |AB| abgekürzt, später mit AB.
- In den Zeichnungen wurde in sketchometry jeweils per Hand noch *LE* hinzugefügt.

Der Ablauf einer Unterrichtsstunde mit dem Tablet

Die Schülerinnen und Schüler sitzen mit ihren Arbeitsblättern – anders als bei Lernumgebungen – anfangs vor einem leeren Bildschirm. Darauf sollen sie selbst eine Zeichnung erstellen, die sie an das Thema heranführt. Die dazu notwendigen Gesten kann ihnen entweder die Lehrkraft (auch in Form einer Einführungsstunde) erläutern oder die Schülerinnen und Schüler können sich die momentan notwendige Geste zunächst in einem Video anschauen. Die entsprechenden Videos finden sie auf **http://em.uni-bayreuth.de/ortslinien**. Die Bedeutung zu jedem Video ist auf der nächsten Seite beschrieben.

Die Schülerinnen und Schüler finden auf ihrem Arbeitsblatt eine Skizze vor, die ihnen als Vorlage für die Zeichnung auf dem Bildschirm dient. Anleitungen zu den Zeichnungen geben die jeweils genannten Videos. Die Zeichnung lässt sich nun dynamisch so verändern, dass sich eine Punktmenge ergibt, die eine bestimmte Eigenschaft aufweist. Die Schülerinnen und Schüler formulieren zunächst mündlich eine möglichst genaue Beschreibung dieser Eigenschaften.

Die Schülerinnen und Schüler können ihre Beobachtung testen, indem sie die betreffende **Ortslinie** einzeichnen: Die dynamisch erzeugte Punktmenge muss auf dieser Ortslinie liegen. Auch zugehörige **Ortsbereiche** können im gleichen Zuge dynamisch erforscht werden.

Es empfiehlt sich, die *Taufe* der betreffenden Ortslinie nicht vor dem Ende der Überlegungen vorzunehmen. Dann erst sollte die Überschrift in das Arbeitsblatt eingetragen werden.

Anhand einer Zeichnung (oder Konstruktion) werden die Erkenntnisse dann auf dem betreffenden Arbeitsblatt notiert. Zu jeder Ortslinie gehören im Allgemeinen zwei Arbeitsblätter, damit **Satz und Kehrsatz** mit der jeweiligen Begründung festgehalten werden können:

(1) „Wenn alle Elemente in einer Punktmenge eine gemeinsame geometrische Eigenschaft (oder mehrere gemeinsame Eigenschaften) besitzen, dann liegen sie auf *(Name der Ortslinie)*."

(2) „Alle Punkte, die auf *(Name der Ortslinie)* liegen, erfüllen die Bedingung(en), dass sie (...)."

In dieser Broschüre wird zuerst auf die Formulierung (1) zurückgegriffen, da sie die Experimentierfreude der Schülerinnen und Schüler schon in eine bestimmte Richtung lenkt: **Erst wird eine Punktmenge mit vorgegebenen Eigenschaften erzeugt,** dann erscheint die zugehörige Ortslinie.

Geben wir dagegen wie im Satz (2) die Ortslinie vor, dann ist es für die Schülerinnen und Schüler manchmal schwierig, die zugehörigen Eigenschaften zu entdecken: Wieso folgt z.B. allein schon aus der Darstellung eines Winkels, dass alle Punkte auf seiner Halbierenden jeweils den gleichen Abstand zu den Schenkeln besitzen?

Zuweilen müssen die Schülerinnen und Schüler Messungen von Streckenlängen oder Winkelmaßen vornehmen. Jede Messung liefert nur gerundete Maßzahlen. Lehrkräfte sollten dieses *Manko* als Motiv für saubere Begründungen im Unterricht willkommen heißen.

Gesten

Eine geometrische Figur auf dem Bildschirm eines Tablets entsteht dadurch, dass darauf mit der Fingerkuppe oder einem speziellen Stift die entsprechende Bewegung, *Geste* genannt, ausgeführt wird. Diese Gesten sind dem Bild, das entstehen soll, nachempfunden. So wird z.B. mit einer Art *W* die Winkelhalbierende eingezeichnet. Jede Geste erzeugt auf dem Bildschirm eine saubere Zeichnung.

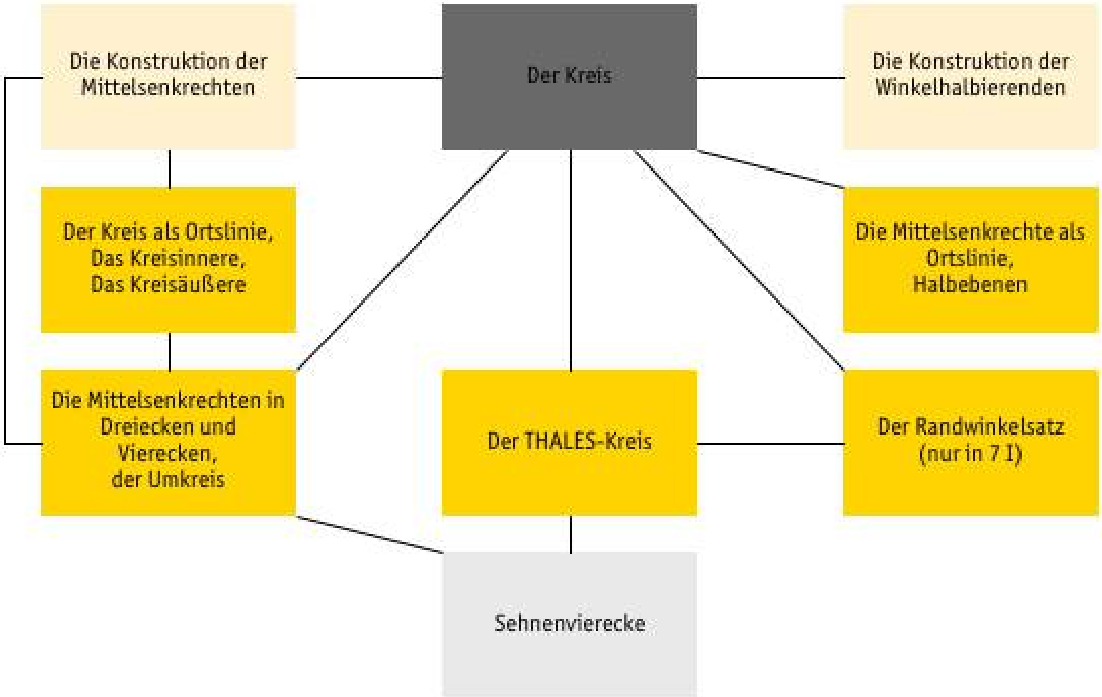
Videos zu einzelnen Gesten

Die Videos zu den einzelnen Gesten sind im Internet unter folgender Adresse abrufbar:
http://em.uni-bayreuth.de/ortslinien

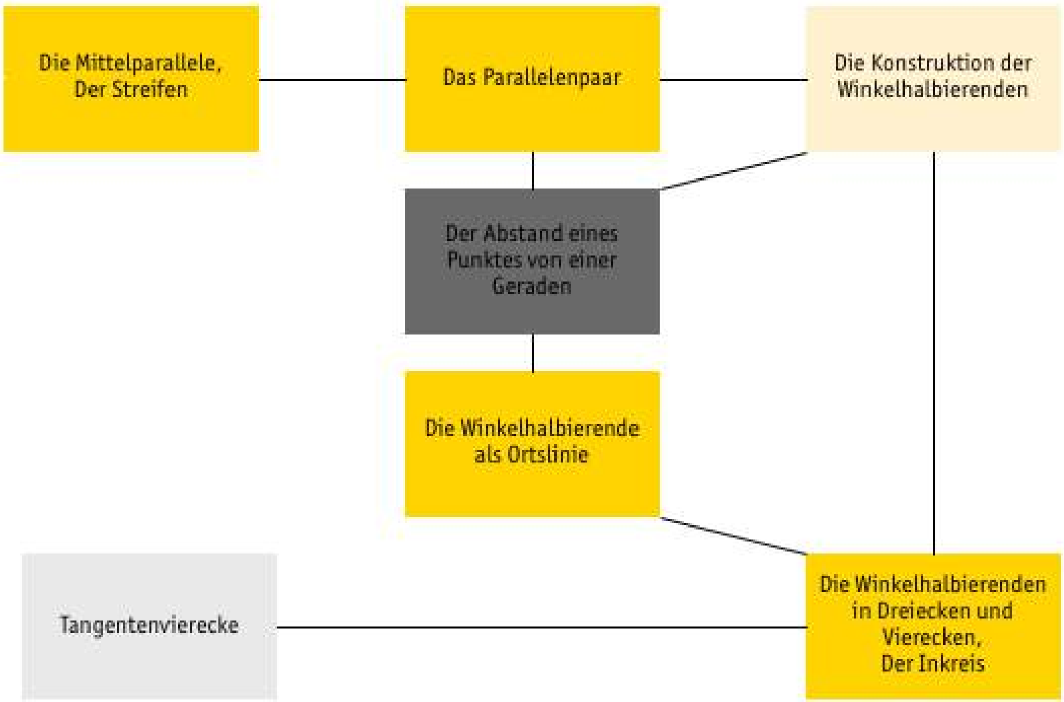
- Video 01 – Die Messung einer Streckenlänge
- Video 02 – Die Konstruktion einer Kreislinie aus ihrem Mittelpunkt und einem Punkt auf der Kreislinie
- Video 03 – Das Kopieren eines Kreises; das Verschieben dieser Kopie an ihrem Mittelpunkt auf einen anderen Punkt
- Video 04 – Der Mittelpunkt einer Strecke
- Video 05 – Einen Punkt in den Spurmodus setzen
- Video 06 – Eine Parallele zu einer Geraden zeichnen
- Video 07 – Eine Senkrechte zu einer Geraden zeichnen
- Video 08 – Die Messung eines Winkels
- Video 09 – Die Zeichnung eines Kreisbogens
- Video 10 – Die Winkelhalbierende einzeichnen
- Video 11 – Ein frei beweglicher Punkt wird zu einem Gleiter auf einem Kreis
- Video 12 – Ein frei beweglicher Punkt wird zu einem Gleiter auf einer Geraden

Die Vernetzung geometrischer Ortslinien und Ortsbereiche

Teil 1



Teil 2



Der Kreis – Das Kreisinnere – Das Kreisäußere

Lehrerhandreichung

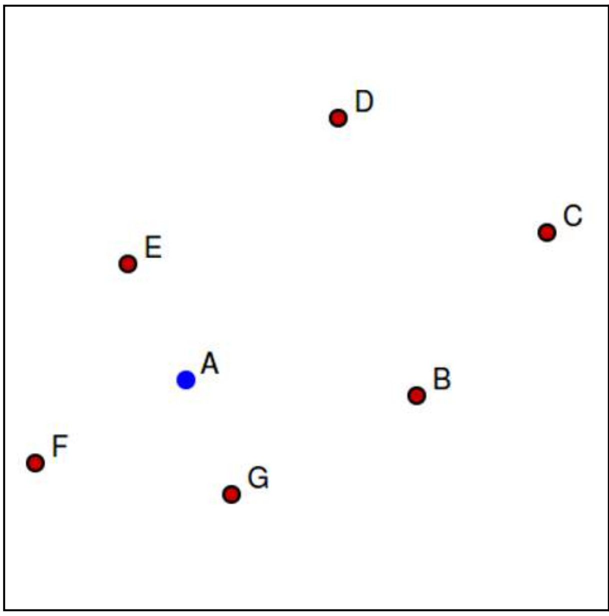
Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler

- Die Entfernung zweier Punkte

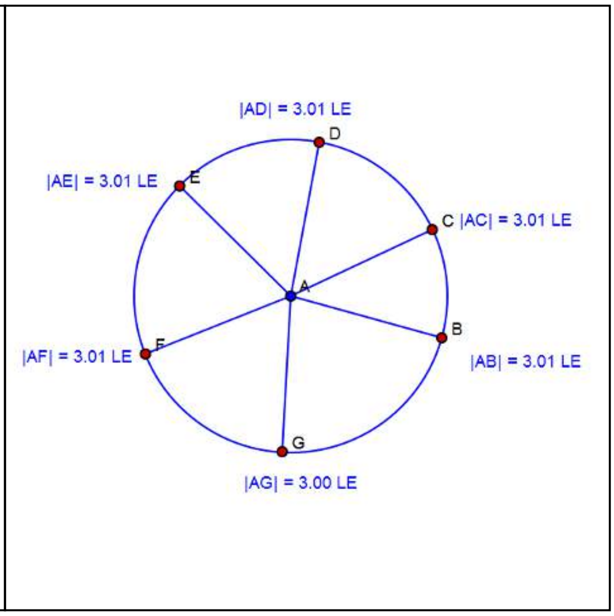
Notwendige Gesten

- Video 01 – Die Messung einer Streckenlänge
- Video 02 – Die Konstruktion einer Kreislinie aus ihrem Mittelpunkt und einem Punkt auf der Kreislinie
- Video 11 – Ein frei beweglicher Punkt wird zu einem Gleiter auf einem Kreis

Einführung zu Arbeitsblatt 1a | Der Kreis als Ortslinie



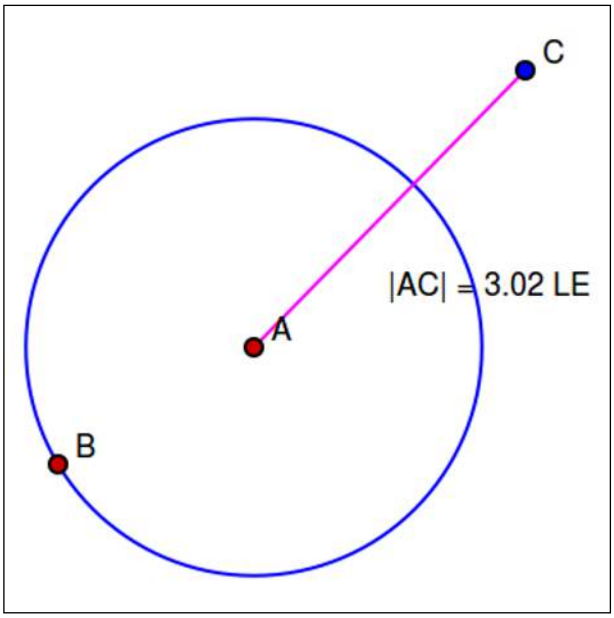
Figur 1



Figur 2

- Ausgehend von sechs Punkten, die sich lose um einen Punkt A gruppieren, zeichnen die Schülerinnen und Schüler vom Punkt A die Strecken zu jedem der sechs Punkte (B, C, D, E, F, G).
- Die Schülerinnen und Schüler messen jeweils die Länge dieser Strecken.
- Die Aufgabe besteht nun darin, die sechs Punkte so zu bewegen, dass ihre Entfernung zum Punkt A jeweils 3 LE beträgt.
- Den Schülerinnen und Schüler fällt nun auf, dass sich diese sechs Punkte auf einer Kreislinie angeordnet haben, die den Mittelpunkt A besitzt.
- Zur Kontrolle zeichnen sie einen Kreis mit dem Mittelpunkt A durch einen dieser sechs Punkte. Dabei ist darauf zu achten, dass der zu skizzierende Kreisbogen **nur durch einen dieser sechs Punkte** gezogen wird, an den anderen jedoch **deutlich vorbei läuft**. Sonst wird immer ein Polygon und kein Kreis gezeichnet.
- Sie notieren sinngemäß: **Alle Punkte, die zu einem festen Punkt (Mittelpunkt) die gleiche Entfernung (Radius) besitzen, liegen auf einer Kreislinie.**
- In weiteren Experimenten ziehen die Schülerinnen und Schüler alle sechs Punkte dorthin, wo sie mehr bzw. weniger als 3 LE vom Punkt A entfernt sind. Sie entdecken, dass diese sechs Punkte zum einen im Kreisäußeren und zum anderen im Kreisinneren liegen.

Einführung zu Arbeitsblatt 1b | Der Kreis als Ortslinie



- Der frei bewegliche Punkt C wird zum Gleiter auf der Kreislinie umfunktioniert.
- Es stellt sich heraus, dass die Entfernung des Punktes C zum Kreismittelpunkt unverändert bleibt.
- Die Schülerinnen und Schüler notieren sinngemäß: **Alle Punkte auf einer Kreislinie haben die gleiche Entfernung zum Kreismittelpunkt.**
- In weiteren Experimenten erschließen die Schülerinnen und Schüler durch die Vorgabe entsprechender Bedingungen das **Kreisinnere** und das **Kreisäußere**.

Anmerkungen

Die Kreislinie ist als Ortslinie z.B. für die gemeinsame Eigenschaft aller Punkte auf der Mittelsenkrechten von fundamentaler Bedeutung. Zudem wird den Schülerinnen und Schülern erst durch die Eigenschaft der Punkte auf einer Kreislinie klar, wie sie bei der Konstruktion der Mittelsenkrechten oder Winkelhalbierenden mit dem Zirkel am besten vorgehen können.

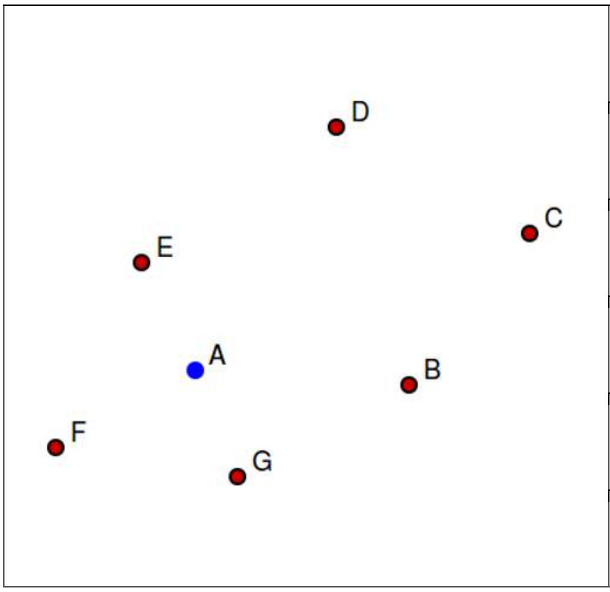
Variationen

- Unter allen möglichen Entfernungen eines **festen Punktes** zu einer **festen Geraden** gibt es eine kürzeste: Diese kürzeste Entfernung heißt ***Abstand*** *dieses Punktes zur Geraden*.
- Wo liegen alle Punkte, die **zu zwei festen Punkten die gleiche Entfernung** besitzen? Diese Fragestellung könnte zur Konstruktion gleichschenkliger Dreiecke führen.
- Ersetze *feste Punkte* durch *feste Geraden* usw.

Schülermaterial

Inhalt

- Arbeitsblatt 1a
- Arbeitsblatt 1b

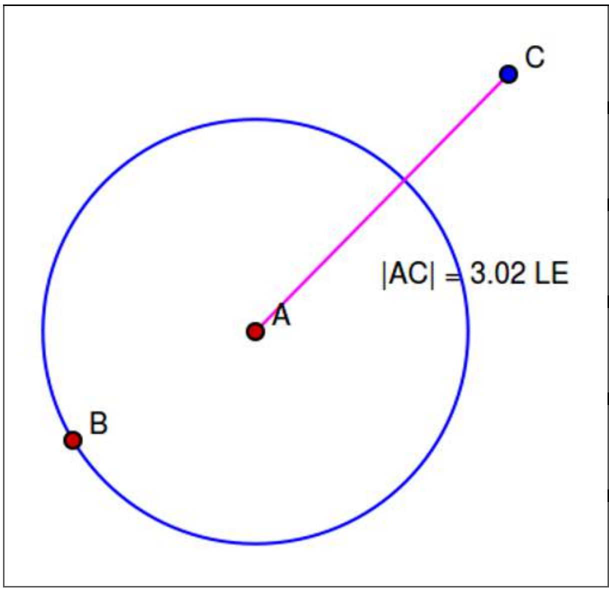


Konstruktionsanweisungen

- Zeichne den Punkt A und die sechs Punkte (B, C, D, E, F, G) die sich ungefähr so wie oben abgebildet um den Punkt A anordnen.

Arbeitsaufträge

- Zeichne vom Punkt A ausgehend die Strecke zu jedem der sechs Punkte (B, C, D, E, F, G). Miss jeweils die Streckenlängen (→ Video 01).
- Bewege nun jeden der sechs Punkte so, dass sie alle jeweils eine Entfernung von 3 LE zum Punkt A besitzen.
- Auf welche Weise ordnen sich jetzt die sechs Punkte um den Punkt A herum an? Konstruiere die Kurve, auf der nun die sechs Punkte liegen (→ Video 02).
- Fertige eine Zeichnung an und formuliere damit eine möglichst genaue Beschreibung dieser Punktmenge: **Alle Punkte, die vom Punkt A (...) .**
- Ziehe nun jeden der sechs Punkte so, dass er weniger als 3 LE vom Punkt A entfernt ist. Notiere, wo sich alle Punkte bezüglich ihrer Lage zur Ortslinie aufhalten.
- Ziehe schließlich jeden der sechs Punkte so, dass sie mehr als 3 LE vom Punkt A entfernt sind. Notiere, wo sich jetzt alle Punkte bezüglich ihrer Lage zur Ortslinie aufhalten.



Konstruktionsanweisungen

- Erstelle die Zeichnung (→ Video 02 → Video 01). Die Streckenlänge muss nicht die gleiche sein.

Arbeitsaufträge

- Ziehe den Punkt C so auf die Kreislinie, dass er zum Kreisgleiter wird (→ Video 11).
  Beobachte während dieser Bewegung die gemessene Streckenlänge.
- Ziehe nun den Kreisgleiter auf der Kreislinie entlang.
  Beobachte erneut die Streckenlänge.
- Fertige eine Zeichnung an und formuliere damit einen vollständigen Satz, der so beginnt:
  Auf einer Kreislinie liegen alle Punkte, die (...) .

Die Mittelsenkrechte – Halbebenen – Der Umkreis von Dreiecken und Vierecken

Lehrerhandreichung

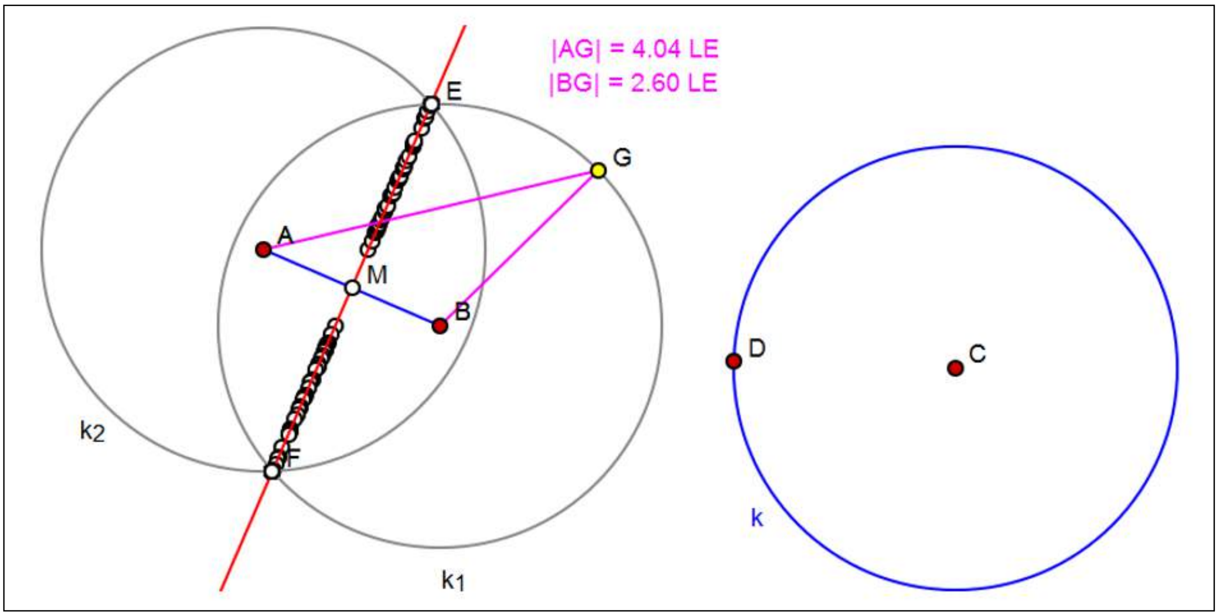
Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler

- Die Mittelsenkrechte
- Der Kreis als Ortslinie

Notwendige Gesten

- Video 01 – Die Messung einer Streckenlänge
- Video 02 – Die Konstruktion einer Kreislinie aus ihrem Mittelpunkt und einem Punkt auf der Kreislinie
- Video 03 – Das Kopieren eines Kreises; das Verschieben dieser Kopie an ihrem Mittelpunkt auf einen anderen Punkt
- Video 04 – Der Mittelpunkt einer Strecke
- Video 05 – Einen Punkt in den Spurmodus setzen
- Video 07 – Eine Senkrechte zu einer Geraden zeichnen
- Video 12 – Ein frei beweglicher Punkt wird zu einem Gleiter auf einer Geraden

Einführung zu Arbeitsblatt 2a | Die Mittelsenkrechte



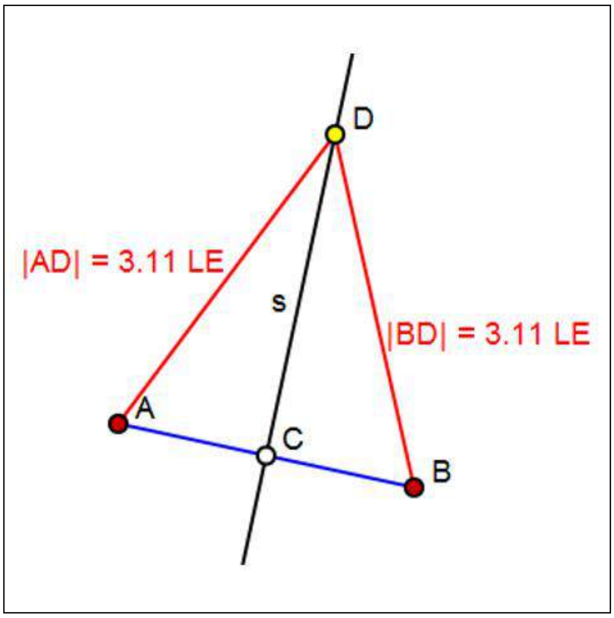
Da die Schülerinnen und Schüler bereits die Konstruktion der Mittelsenkrechten mit dem Zirkel kennen, bietet sich nun folgende Vorgehensweise an:

- Die Schülerinnen und Schüler zeichnen die Strecke [AB] und aus C und D einen freien Kreis k. Die Mittelpunkte zweier Kopien dieses Kreises (k_1 und k_2) werden auf B bzw. A gelegt. Der Punkt G wird als Gleiter auf die Kreislinie k_1 gelegt. Die Längen der Strecken [AG] und [BG] werden gemessen.
- Die Schnittpunkte E und F dieser beiden Kreise werden markiert. Der Gleiter G wird einmal mit dem Punkt E und dann mit dem Punkt F zur Deckung gebracht. Es stellt sich heraus, dass in beiden Positionen die Längenmaße gleich sind.
- Nun werden die Punkte E und F in den Spurmodus versetzt.
- Durch Ziehen am Punkt D werden die Kreisradien der Kopien synchron verändert. Die Punkte E und F erzeugen dabei eine Spur, die auf der Mittelsenkrechten liegt. Dies bestätigen sie durch eine Konstruktion am Bildschirm.
- Mit Hilfe des Punktes G erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass in jedem Fall die Entfernungen der Punkte E und F vom Punkt A bzw. B stets übereinstimmen.
- Die Schülerinnen und Schüler fertigen eine entsprechende Zeichnung an und notieren sinngemäß: **Alle Punkte, die von zwei festen Punkten A und B jeweils die gleiche Entfernung besitzen, liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke [AB].**

Anmerkung

Der Radius des Kreises k entscheidet sowohl über die Konstruierbarkeit als auch über die Genauigkeit der Konstruktion einer Mittelsenkrechten.

Einführung zu Arbeitsblatt 2b | Die Mittelsenkrechte



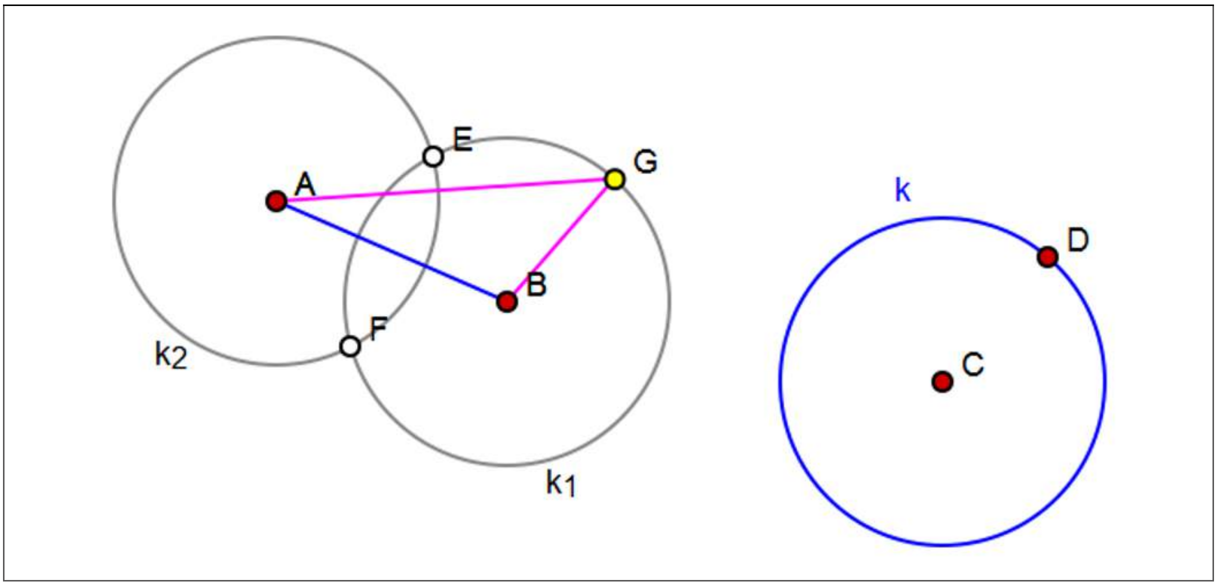
- Ein freier Punkt D wird zunächst neben die Mittelsenkrechte s gelegt. Seine beiden Entfernungen zu den Punkten A und B werden gemessen.
- Während der Bewegung des Punktes D hin zu s beobachten die Schülerinnen und Schüler, dass sich die Maßzahlen ändern.
- Nun wird D auf die Mittelsenkrechte s gezogen und dort in einen Gleiter verwandelt. Während der anschließenden Bewegung von D beobachten die Schülerinnen und Schüler, dass die Längen der gemessenen Strecken paarweise gleich sind.
- Anhand einer entsprechenden Zeichnung formulieren sie sinngemäß: **Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten zu einer Strecke [AB] haben jeweils zu A und B die gleiche Entfernung.**

In einem weiteren Experiment lösen die Schülerinnen und Schüler den Punkt D wieder von der Mittelsenkrechten s. Dann suchen sie den Bereich auf, in dem der Punkt D (z.B.) näher am Punkt A liegt. Sie erkennen diesen Bereich als eine (offene) Halbebene die durch s begrenzt ist. Diesen Sachverhalt können sich die Schülerinnen und Schüler dadurch verdeutlichen, dass sie den freien Punkt D in den Spurmodus versetzen.

Schülermaterial

Inhalt

- Arbeitsblatt 2a
- Arbeitsblatt 2b

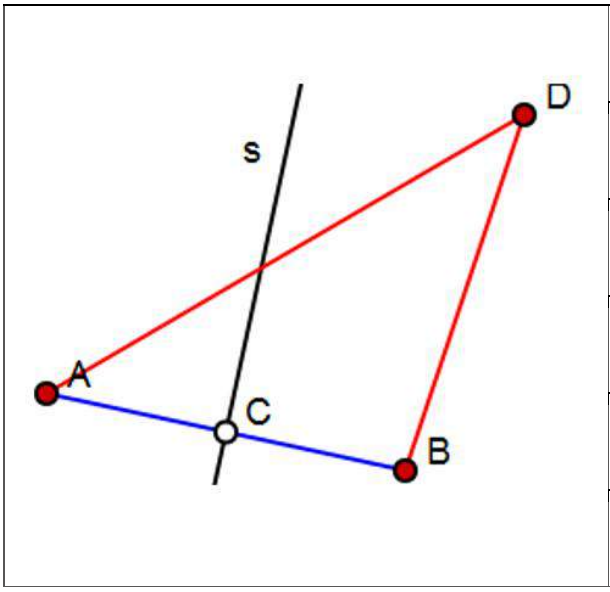


Konstruktionsanweisungen

- Zeichne die Strecke [AB].
- Zeichne mit Hilfe der Punkte C und D die Kreislinie k (→ Video 02).
- Ziehe den Mittelpunkt einer Kopie von k auf den Punkt B (siehe k_1) (→ Video 03).
- Ziehe den Mittelpunkt einer Kopie von k auf den Punkt A (siehe k_2) (→ Video 03).
- Setze auf die Kreislinie k_1 den Gleiter G.
- Zeichne die Strecken [AG] und [BG] ein. Miss die Länge dieser Strecken (→ Video 01).
- Markiere die Schnittpunkte E und F von k_1 mit k_2.

Arbeitsaufträge

- Ziehe den Gleiter G auf den Punkt E. Betrachte jetzt die Streckenlängen.
  Ziehe nun den Gleiter G auf den Punkt F. Betrachte erneut die Streckenlängen. Was stellst du fest?
- Setze E und F in den Spurmodus (→ Video 05).
- Verändere durch Ziehen am Punkt D die Radien von k_1 und k_2.
  Beschreibe den Verlauf der Spuren von E und F möglichst genau.
- Bestätige deine Ansicht durch eine Konstruktion am Bildschirm (→ Video 04 → Video 07).
- Ziehe jetzt den Gleiter G wieder auf den Punkt E und dann auf den Punkt F. Betrachte die gemessenen Streckenlängen. Was stellst du fest?
- Fertige eine entsprechende Zeichnung an und notiere, welche gemeinsame Eigenschaft die Spurpunkte besitzen: **Alle Punkte, die (...) .**



Konstruktionsanweisung

- Die Gerade s ist die Mittelsenkrechte der Strecke [AB] (→ Video 04 → Video 07).
- Miss die jeweilige Länge der Strecken [DA] und [DB] (→ Video 01).

Arbeitsaufträge

- Ziehe den Punkt D so auf die Mittelsenkrechte s, dass D zum Gleiter auf s wird (→ Video 12). Beobachte dabei die beiden Streckenlängen.
- Ziehe nun den Punkt D so, dass er zum Gleiter auf der Mittelsenkrechten s wird (→ Video 12). Ziehe den Punkt D auf der Mittelsenkrechten s und beobachte wieder die beiden Streckenlängen. Was stellst du fest?
- Fertige eine entsprechende Zeichnung an und notiere, welche gemeinsame Eigenschaft alle Punkte auf der Mittelsenkrechten besitzen.
- Löse nun wieder den Gleiter D von der Mittelsenkrechten s.
- Bewege den jetzt freien Punkt D überall dorthin, wo D näher am Punkt B als am Punkt A liegt. In welchem Bereich ist dies der Fall? (Tipp: Setze den freien Punkt D in den Spurmodus → Video 5.)
- Skizziere diesen Bereich. Notiere dazu die gemeinsame Eigenschaft, die alle Punkte in diesem Bereich besitzen.

Die Winkelhalbierende

Lehrerhandreichung

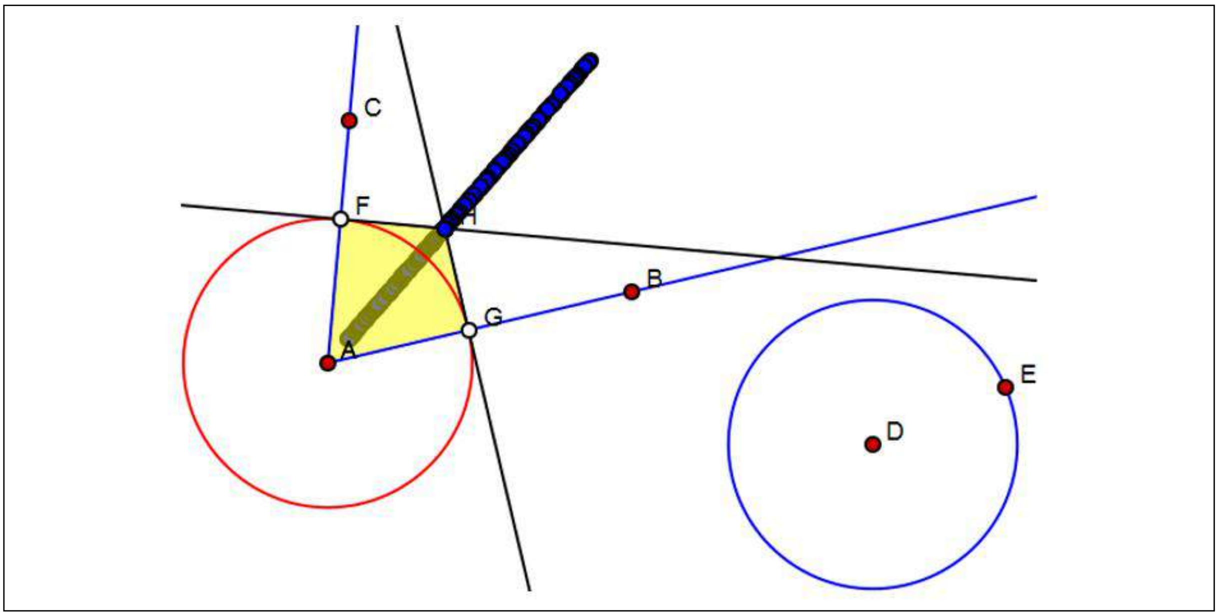
Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler

- Der Kreis als Ortslinie
- Die Winkelhalbierende
- Senkrechte Geraden
- Der Abstand eines Punktes von einer Geraden
- Die Eigenschaften achsensymmetrischer Drachenvierecke

Notwendige Gesten

- Video 02 – Die Konstruktion einer Kreislinie aus ihrem Mittelpunkt und einem Punkt auf der Kreislinie
- Video 03 – Das Kopieren eines Kreises; das Verschieben dieser Kopie an ihrem Mittelpunkt auf einen anderen Punkt
- Video 05 – Einen Punkt in den Spurmodus setzen
- Video 07 – Eine Senkrechte zu einer Geraden zeichnen
- Video 10 – Die Winkelhalbierende einzeichnen
- Video 12 – Ein frei beweglicher Punkt wird zu einem Gleiter auf einer Geraden

Einführung zu Arbeitsblatt 3a | Die Winkelhalbierende



- Die Schülerinnen und Schüler zeichnen den Winkel BAC. Auf seinen Schenkeln liegen die beiden Schnittpunkte F und G mit einem roten Kreis, der eine Kopie des variablen blauen Kreises ist. Sie zeichnen die beiden Senkrechten zu den zwei Schenkeln in den Punkten F bzw. G. Ihr Schnittpunkt ist H.
- Durch Ziehen am Punkt E kann der Radius des blauen und damit roten Kreises verändert werden, so dass die Spur des Punktes H aufgezeichnet wird.
- Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass der Punkt H stets ein achsensymmetrisches Drachenviereck AGHF erzeugt. Folglich ist diese Spur die Symmetrieachse in diesen Drachenvierecken, die gleichzeitig als Halbierende zweier Innenwinkel fungiert. Die Punkte F und G besitzen somit in jeder Phase den gleichen Abstand zu den Schenkeln des Winkels BAC.
- Sie notieren sinngemäß: **Alle Punkte, die jeweils den gleichen Abstand zu den Schenkeln eines Winkels besitzen, liegen auf der Winkelhalbierenden.**

Anmerkungen

1. Die Schülerinnen und Schüler sehen zwar, dass es sich um Drachenvierecke handelt, aber eine saubere Begründung dafür fehlt. Diese ist nur durch einen Kongruenzbeweis mit Hilfe der Diagonalen [AH] im Viereck AGHF zu erbringen:

   In den beiden Teildreiecken AGH und AHF gilt:

   - Sie sind rechtwinklig.
   - Sie besitzen die gemeinsame Hypotenuse [AH].
   - Die Katheten [AF] und [AG] sind gleich lang.

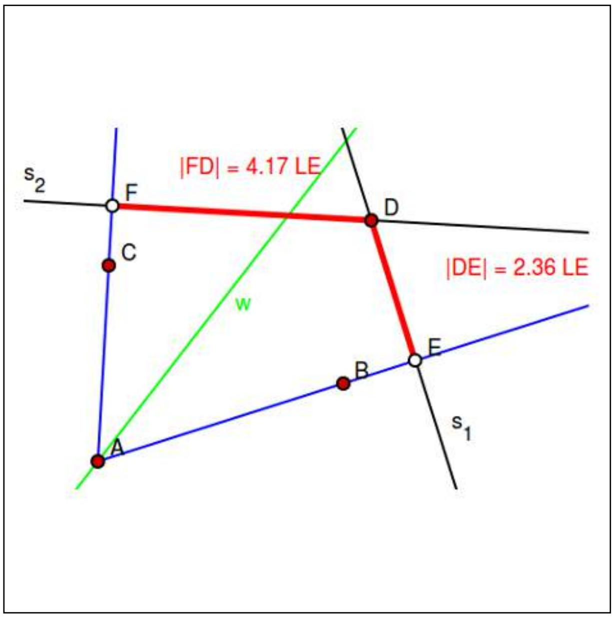
   Damit sind die beiden Dreiecke AGH und AHF kongruent (ssw_g) und deshalb haben die Winkel FAH und HAG gleiches Maß und die Seiten [FH] und [GH] sind gleich lang. Also sind die beiden Abstände zu den Schenkeln für jede Position von H gleich. Das Viereck AGHF ist somit ein achsensymmetrischer Drachen.

   Unter Umständen werden jedoch im Lehrplan Begründungen oder Beweise für Kongruenzsätze erst **nach** dem Thema *Ortslinien und Ortsbereiche* behandelt:

   - Ortslinien und Ortsbereiche
   - Aufbau von kongruenz- und abbildungsgeometrischen Beweisen

2. Die ursprüngliche Figur auf dem Arbeitsblatt 3a hat den Vorteil, dass teilweise auf die Konstruktion der Winkelhalbierenden zurückgegriffen wird.

Einführung zu Arbeitsblatt 3b | Die Winkelhalbierende

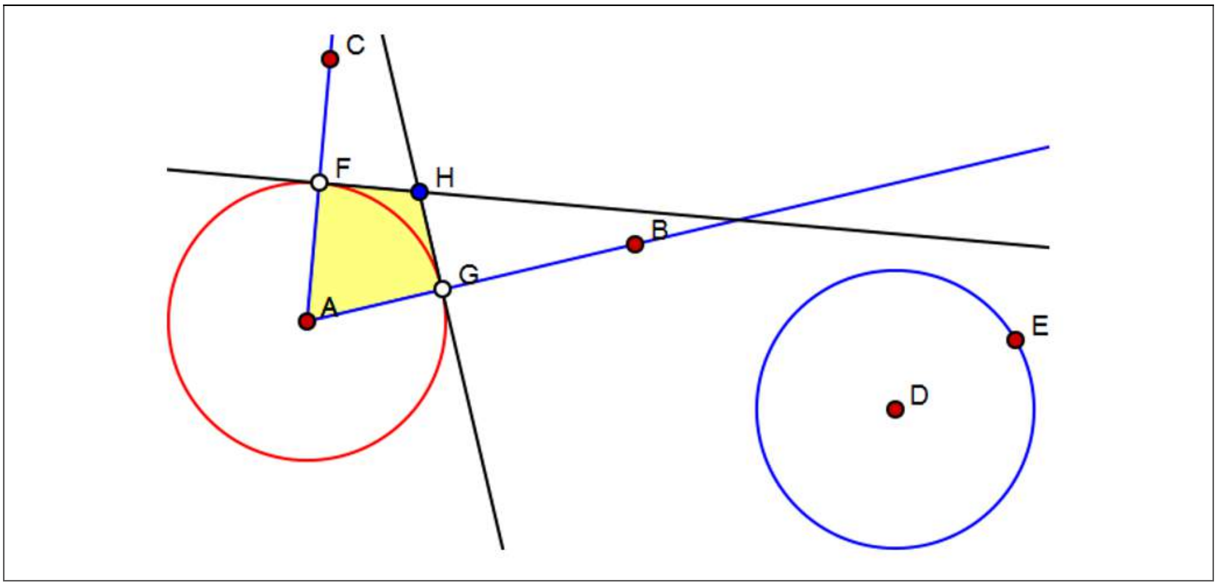


- Die Abstände des frei beweglichen Punktes D im Feld des Winkels BAD zu dessen Schenkeln werden gemessen.
- Der Punkt D wird auf die Winkelhalbierende w gezogen und dort als Gleiter eingestellt. Wenn der Punkt D jetzt auf w bewegt wird, sind seine Abstände zu den Schenkeln paarweise gleich.
- Die Schülerinnen und Schüler erstellen eine Zeichnung, der diesen Sachverhalt an einem Beispiel darstellt. Sie notieren sinngemäß: **Alle Punkte auf der Winkelhalbierenden haben jeweils den gleichen Abstand zu den Schenkeln des Winkels.**

Schülermaterial

Inhalt

- Arbeitsblatt 3a
- Arbeitsblatt 3b

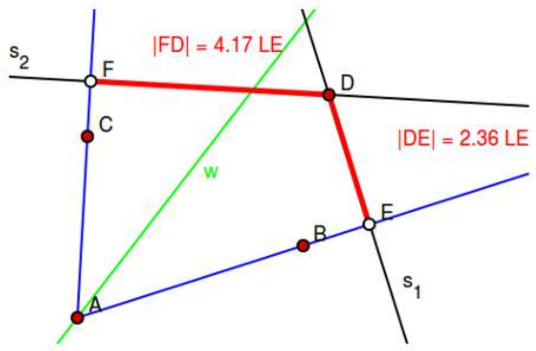


Konstruktionsanweisungen

- Zeichne die drei Punkte A, B, C und D und dazu den Winkel BAC.
- Zeichne mit Hilfe der Punkte E und D den blauen Kreis (→ Video 02).
- Verschiebe den Mittelpunkt einer Kopie dieses Kreises (→ Video 03) auf den Punkt A (roter Kreis).
- Markiere die Schnittpunkte F und G des roten Kreises mit den Schenkeln des Winkels BAC.

Arbeitsaufträge

- Zeichne in den Punkten F und G jeweils die Senkrechte zu dem betreffenden Schenkel des Winkels BAC.
- Markiere den Schnittpunkt H dieser beiden Senkrechten und versetze H in den Spurmodus (→ Video 05).
- Ziehe am Punkt E der blauen Kreislinie und beobachte die Spur, die der Punkt H hinterlässt.
- Beschreibe die Lage dieser Spur im Winkel BAC. Überprüfe deine Beschreibung mit Hilfe einer Konstruktion am Bildschirm (→ Video 10).
  Begründe die Lage dieser Spur mit Hilfe der Eigenschaften des Vierecks AGHF.
- Zeichne die Figur wie oben aber ohne den blauen Kreis. Notiere, welche gemeinsame Eigenschaft der Punkt H auf seiner Wanderschaft im Winkel beibehält.
- Notiere einen vollständigen Satz der so beginnt: **Alle Punkte, die (...) .**



Konstruktionsanweisungen

- Zeichne den Winkel BAC und einen frei beweglichen Punkt D.
- Zeichne die Winkelhalbierende w ein (→ Video 10).
- Zeichne die beiden Senkrechten s_1 und s_2 durch den Punkt D auf die beiden Schenkel [AE] und [AF] (→ Video 07).
- Markiere die Schnittpunkte E und F.
- Zeichne die Strecken [DE] und [FD] ein und miss ihre Längen.

Arbeitsaufträge

- Bewege den Punkt D hin zur Winkelhalbierenden. Beobachte dabei die Längen der Strecken [DE] und [DF].
- Ziehe den Punkt D auf die Winkelhalbierende, so dass er dort zum Gleiter wird (→ Video 12). Betrachte jetzt die Längenmaße. Was stellst du fest?
- Ziehe D auf der Winkelhalbierenden w hin und her.
  Was beobachtest du jetzt?
- Zeichne die Darstellung auf dem Bildschirm in dein Heft.
  Notiere einen vollständigen Satz der so beginnt: **Alle Punkte, die (...) .**

Die Mittelparallele – Der Streifen

Lehrerhandreichung

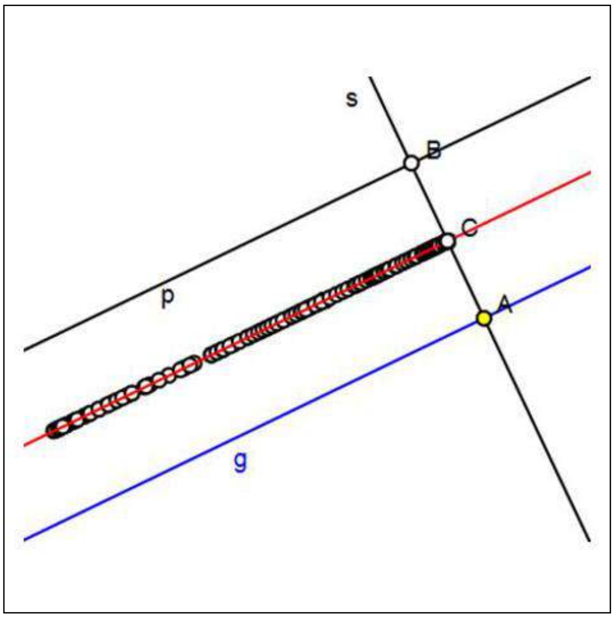
Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler

- Die Mittelsenkrechte
- Der Kreis als Ortslinie
- Senkrechte Geraden
- Parallele Geraden
- Der Abstand eines Punktes von einer Geraden

Notwendige Gesten

- Video 01 – Die Messung einer Streckenlänge
- Video 04 – Der Mittelpunkt einer Strecke
- Video 05 – Einen Punkt in den Spurmodus setzen
- Video 06 – Eine Parallele zu einer Geraden zeichnen
- Video 07 – Eine Senkrechte zu einer Geraden zeichnen

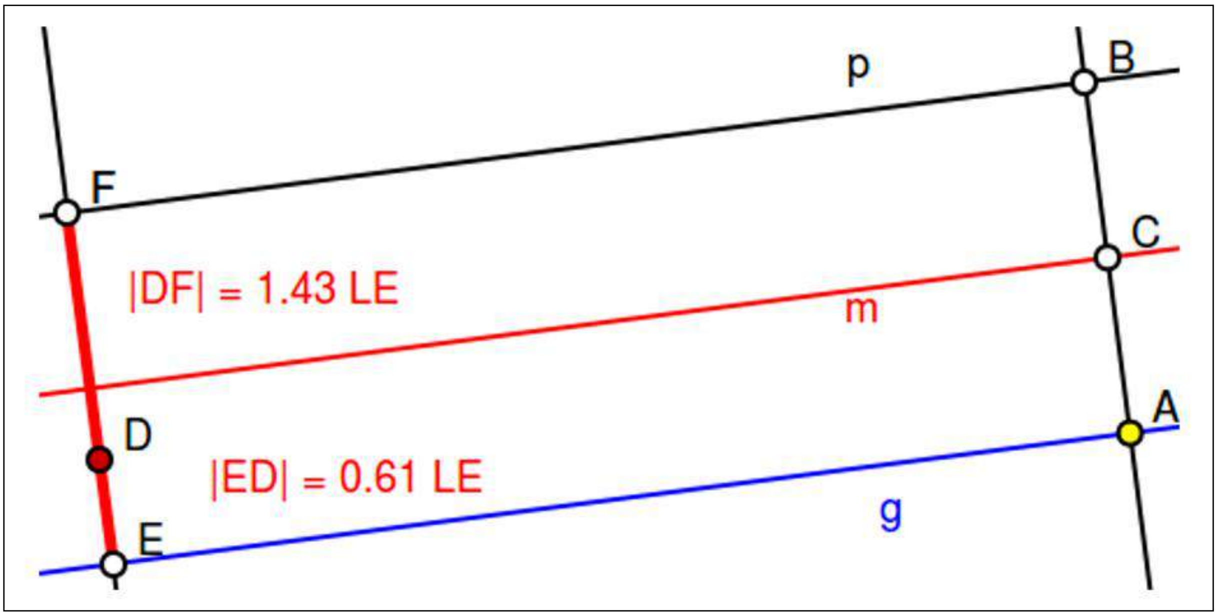
Einführung zu Arbeitsblatt 4a | Die Mittelparallele



- Der Punkt A ist ein Gleiter auf der Geraden g. Die Gerade p verläuft zur Geraden g parallel.
- Die Gerade s steht in den Punkten A und B auf den parallelen Geraden g und p senkrecht.
- Der Punkt C ist der Mittelpunkt der Strecke [AB].
- Wenn der Punkt A auf der Geraden g entlang geführt wird, dann liegt die Spur vom Punkt C auf der Mittelparallelen.

- Die Schülerinnen und Schüler überprüfen dies zunächst am Bildschirm (rote Gerade).
- Sie fertigen eine entsprechende Zeichnung an und notieren sinngemäß: **Alle Punkte, die von zwei parallelen Geraden g und p den gleichen Abstand besitzen, liegen auf der Mittelparallelen zwischen g und p.**
- Die Mittelparallele kann entweder mit dem Geodreieck gezeichnet oder als Mittelsenkrechte einer Strecke [AB] konstruiert werden.

Einführung zu Arbeitsblatt 4b | Die Mittelparallele, der Streifen



Die Schülerinnen und Schüler zeichnen die Parallelen g und p sowie anhand der Punkte A, B und C die Mittelparallele m ein.

- Ein freier Punkt D wandert im Streifen (oder außerhalb des Streifens), der von g und p begrenzt ist. Dabei werden laufend die Abstände des Punktes D von g und p gemessen. Es stellt sich heraus, dass die gemessenen Abstände paarweise verschieden sind.
- Erst dann, wenn der Punkt zum Gleiter auf der Mittelparallelen m wird und sich auf ihr hin- und her bewegt, bleiben die Abstände paarweise gleich.

Anhand einer entsprechenden Zeichnung formulieren die Schülerinnen und Schüler sinngemäß:
Alle Punkte auf der Mittelparallelen zu zwei parallelen Geraden g und p haben jeweils zu g und p den gleichen Abstand.

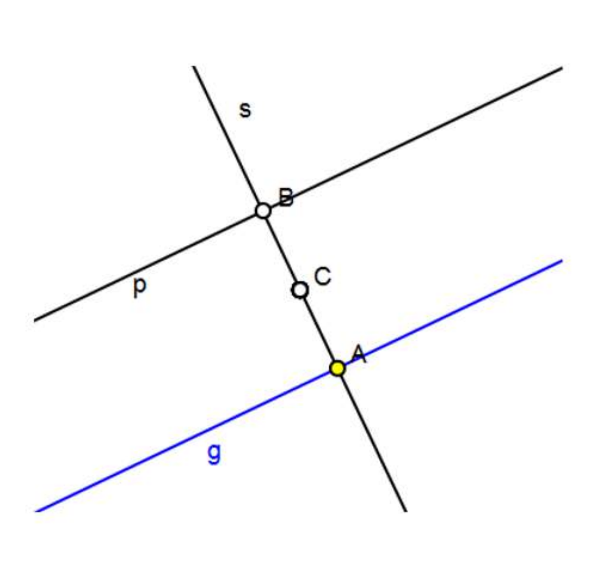
Ein weiteres Experiment

- Die Schülerinnen und Schüler messen die Streckenlänge [CA] (→ Video 01) und stellen fest, das [CA] = [CB] gilt.
- Die Schülerinnen und Schüler **lösen** den Punkt D wieder von der Mittelparallelen m.
- Sie bewegen den Punkt D überall dorthin, wo [DE] < [CA] ∨ [DF] < [CB] gilt.
- Sie stellen fest, dass dann die Spur von D in dem **Streifen** zwischen g und p aufgezeichnet wird.
- Eine entsprechende Zeichnung und der zugehörige Text folgen:
  Alle Punkte, die von der Mittelparallelen m weniger als (...) LE entfernt sind, liegen in dem Streifen zwischen g und p.

Schülermaterial

Inhalt

- Arbeitsblatt 4a
- Arbeitsblatt 4b

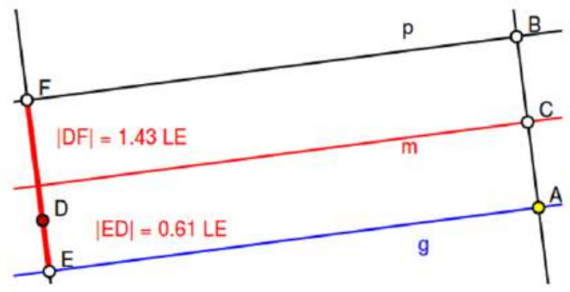


Konstruktionsanweisungen

- Der Punkt A ist ein Gleiter auf der Geraden g.
- Die Gerade p ist zur Geraden g parallel (→ Video 06).
- Die Gerade s steht auf den beiden Parallelen senkrecht (→ Video 07).
- Der Punkt C ist der Mittelpunkt der Strecke [AB] (→ Video 04).

Arbeitsaufträge

- Setze C in den Spurmodus (→ Video 05).
- Ziehe den Punkt A auf der Geraden g entlang.
- Beschreibe den Verlauf der Spur des Punktes C möglichst genau.
- Überprüfe deine Beobachtung am Bildschirm.
- Fertige die entsprechende Zeichnung an.
  Notiere einen vollständigen Satz der so beginnt: **Alle Punkte, die (...) .**



Konstruktionsanweisungen

- Zeichne die aus dem Arbeitsblatt 4a ermittelte Ortslinie m (z.B. → Video 06).
- Zeichne den Punkt D in den Streifen, der von g und p begrenzt ist.
- Zeichne die Senkrechte durch D zu g und p.
- Fixiere die Schnittpunkte E und F.
- Zeichne die Strecken [DE] und [DF] ein. Miss deren Länge.

Arbeitsaufträge

- Bewege D im Streifen. Beobachte dabei die Längenmaße.
- Ziehe den Punkt D auf die Gerade m und mache ihn zum Gleiter.
  Bewege D auf m entlang und beobachte wieder die Längenmaße.
- Fertige eine Zeichnung an. Notiere einen vollständigen Satz der so beginnt:
  Alle Punkte auf der (...) .
- Zeichne auf dem Bildschirm die Strecke [CA] ein und miss ihre Länge (→ Video 01). Was weißt du dann über den Abstand [CB]?
- Löse den Punkt D wieder von der Mittelparallelen m.
  Bewege jetzt den Punkt D überall dorthin, wo sein Abstand zur Mittelparallelen m höchstens so groß wie [CA] oder [CB] ist. Tipp: Versetze den Punkt D zeitweise in den Spurmodus (→ Video 05).
  Fertige dazu eine Zeichnung an.
  Notiere eine Beschreibung der Menge aller Punkte, die in Frage kommen.

Das Parallelenpaar

Lehrerhandreichung

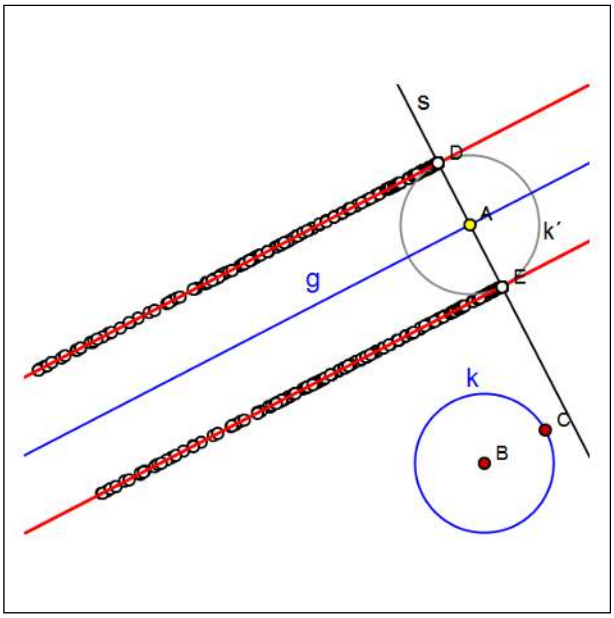
Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler

- Der Kreis als Ortslinie
- Der Abstand eines Punktes von einer Geraden

Notwendige Gesten

- Video 02 – Die Konstruktion einer Kreislinie aus ihrem Mittelpunkt und einem Punkt auf der Kreislinie
- Video 03 – Das Kopieren eines Kreises; das Verschieben dieser Kopie an ihrem Mittelpunkt auf einen anderen Punkt
- Video 05 – Einen Punkt in den Spurmodus setzen
- Video 07 – Eine Senkrechte zu einer Geraden zeichnen

Einführung zu Arbeitsblatt 5 | Das Parallelenpaar



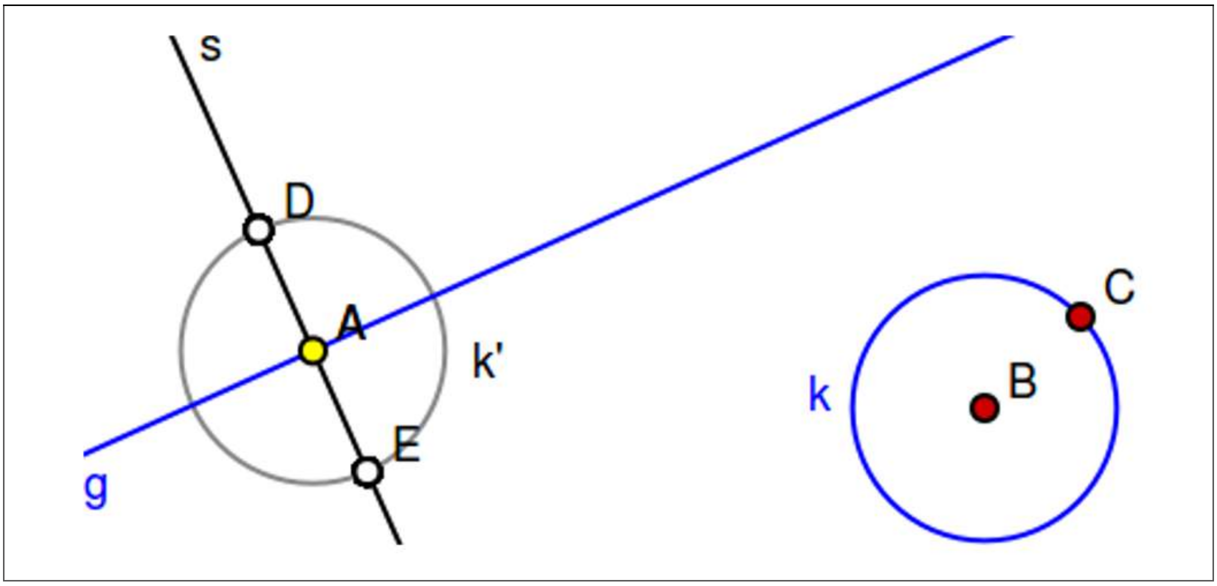
- Der Punkt A ist ein Gleiter auf der Geraden g.
- Die Gerade s steht auf der Geraden g senkrecht.
- Der Kreis k' ist eine Kopie des Kreises k, der aus den Punkten B und C erzeugt worden ist.

- Die Schülerinnen und Schüler setzen die Schnittpunkte D und E in den Spurmodus.
- Während der Bewegung von A auf g erzeugen die Punkte D und E Spuren, die auf einem Parallelenpaar liegen.
  Die Schülerinnen und Schüler bestätigen dies durch die entsprechende Ergänzung auf dem Bildschirm.
- Sie fertigen eine Zeichnung an und notieren sinngemäß: **Alle Punkte, die von der Geraden g den gleichen Abstand haben, liegen auf einem Parallelenpaar zu g.**

Schülermaterial

Inhalt

- Arbeitsblatt 5



Konstruktionsanweisungen

- Setze den Gleiter A auf die Gerade g.
- Zeichne die Senkrechte s zu g durch A (→ Video 07).
- Zeichne mit Hilfe von zwei freien Punkten B und C die Kreislinie k (→ Video 02).
- Ziehe den Mittelpunkt einer Kopie k' dieses Kreises auf A. (→ Video 03)
- Markiere die Schnittpunkte D und E von k' mit s.

Arbeitsaufträge

- Setze diese Schnittpunkte in den Spurmodus (→ Video 05).
- Ziehe jetzt den Gleiter A auf g hin und her.
  Beschreibe die Spuren, die die Punkte D und E hinterlassen.
  Bestätige deine Beschreibung durch die Ergänzung am Bildschirm.
- Fertige die entsprechende Zeichnung an. Notiere dazu die gemeinsame Eigenschaft aller Spurpunkte bezüglich ihrer Lage zur Geraden g.

Die Mittelsenkrechten im Dreieck – Der Umkreis

Lehrerhandreichung

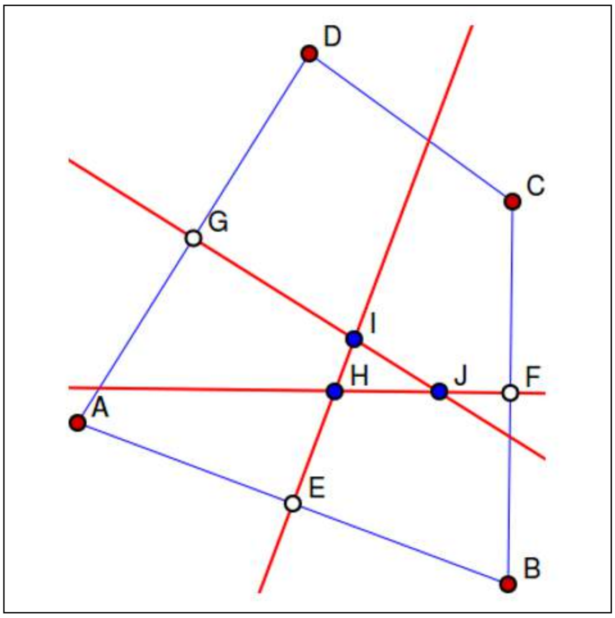
Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler

- Die Mittelsenkrechte
- Der Kreis als Ortslinie

Notwendige Gesten

- Video 02 – Die Konstruktion einer Kreislinie aus ihrem Mittelpunkt und einem Punkt auf der Kreislinie
- Video 04 – Der Mittelpunkt einer Strecke
- Video 07 – Eine Senkrechte zu einer Geraden zeichnen

Einführung zu Arbeitsblatt 6a | Die Mittelsenkrechten im Dreieck



Im Viereck ABCD werden drei Mittelsenkrechte paarweise geschnitten. Der Eckpunkt D wird so bewegt, dass er sich mit dem Eckpunkt C deckt. Nun ist aus dem Viereck ABCD das Dreieck ABC entstanden, in dem sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden.

Auch dann, wenn A oder B bewegt werden, bleibt der gemeinsame Schnittpunkt erhalten.

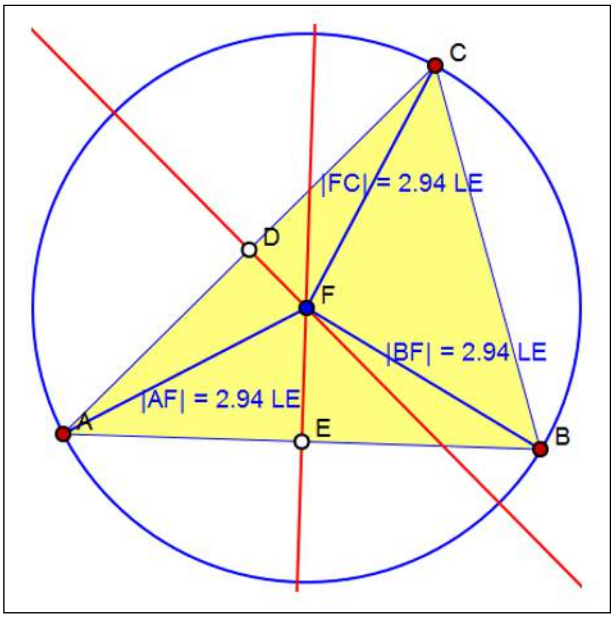
Die Schülerinnen und Schüler notieren sinngemäß: **In jedem Dreieck schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt. In Vierecken ist das im Allgemeinen nicht der Fall.**

Die entsprechende Zeichnung folgt.

Ausblick

- Es gibt auch nicht symmetrische Vierecke, in denen sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden. Muss dann auch die vierte Mittelsenkrechte durch diesen Punkt verlaufen? Diese Fragestellung führt zum Sehnenviereck.
- In welchen besonderen Vierecken schneiden sich alle vier Mittelsenkrechten in einem Punkt? Diese Fragestellung führt zu bestimmten symmetrischen Vierecken.

Einführung zu Arbeitsblatt 6b | Der Umkreis eines Dreiecks



Der Punkt F wird als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten konstruiert. Von F werden die Strecken zu den Eckpunkten des Dreiecks eingezeichnet und ihre Längen gemessen. Aufgrund der Eigenschaften der Mittelsenkrechten als Ortslinie stellt sich heraus, dass alle drei Strecken gleich lang sind. Also müssen A, B und C auf einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt F liegen. Dieser Kreis heißt **Umkreis des Dreiecks**.

An diesen Erkenntnissen ändert sich nichts, wenn man an den Punkten A, B oder C zieht.

Die Schülerinnen und Schüler ergänzen ihre vorherige Zeichnung durch den Umkreis des Dreiecks. Die entsprechende Beschreibung wird notiert.

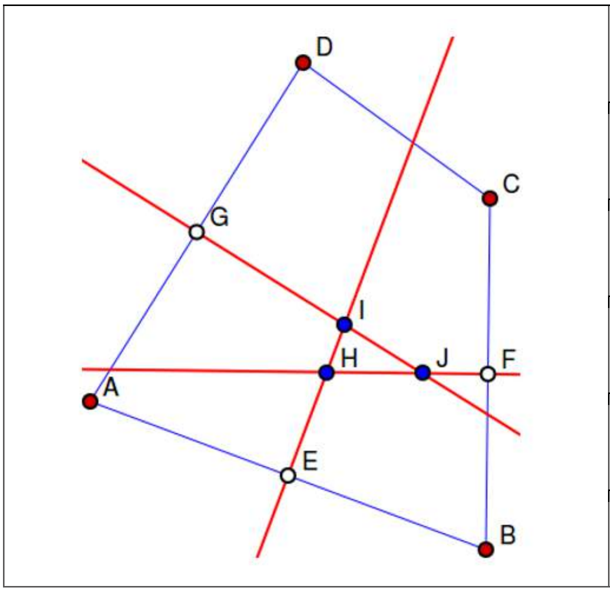
Anmerkung

Wenn man an A, B oder C entsprechend zieht, kann der Umkreismittelpunkt auch außerhalb des Dreiecks oder auf einer Dreiecksseite liegen. Diese Möglichkeiten führen einerseits zum stumpfwinkligen, andererseits zum rechtwinkligen Dreieck mit dem THALES-Kreis als Umkreis.

Schülermaterial

Inhalt

- Arbeitsblatt 6a
- Arbeitsblatt 6b

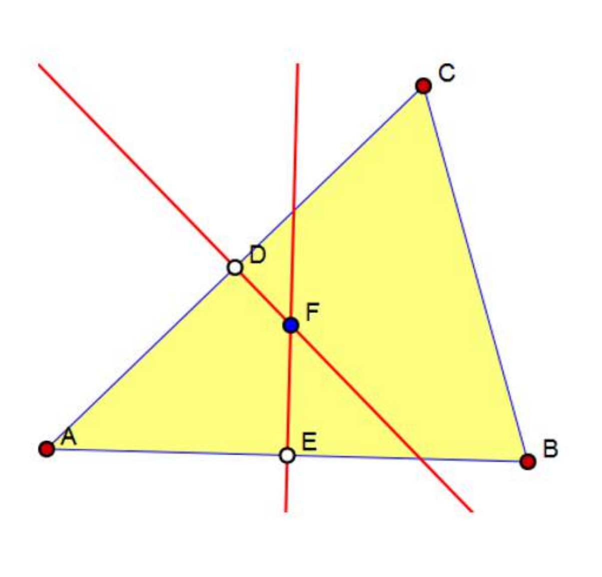


Konstruktionsanweisungen

- Zeichne auf drei Seiten des Vierecks ABCD die drei abgebildeten Mittelsenkrechten (→ Video 04 → Video 07).
- Markiere die drei Schnittpunkte dieser Mittelsenkrechten.

Arbeitsaufträge

- Ziehe den Punkt D auf den Punkt C.
  Was wird dann aus dem Viereck ABCD?
  Was wird aus den drei Schnittpunkten?
- Ziehe am Punkt A oder B.
  Gelten deine Feststellungen noch?
- Fertige dazu eine Zeichnung an.
  Notiere, was du festgestellt hast.



Konstruktionsanweisungen

- Zeichne das Dreieck ABC mit zwei seiner Mittelsenkrechten (→ Video 04 → Video 07).
- Markiere den Schnittpunkt F dieser Mittelsenkrechten.

Arbeitsaufträge

- Zeichne die Strecken [FA], [FB] und [FC] ein.
- Miss die Längen dieser Strecken (→ Video 01).
  Was stellst du fest?
  Auf welcher Ortslinie müssen sich demnach die drei Eckpunkte des Dreiecks ABC aufhalten?
  Überprüfe deine Vermutung auf dem Bildschirm (→ Video 02).
- Ziehe am Punkt A oder B. Gelten deine Feststellungen noch?
- Ergänze deine vorherige Zeichnung entsprechend.
  Notiere, was du festgestellt hast.

Die Winkelhalbierenden im Dreieck – Der Inkreis

Lehrerhandreichung

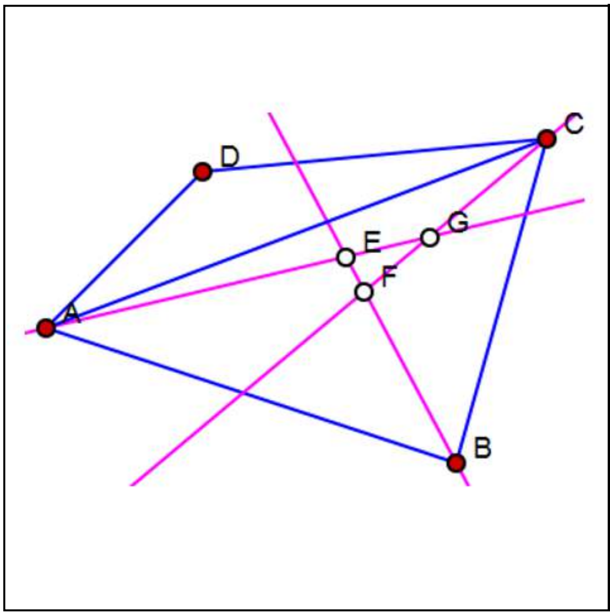
Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler

- Die Winkelhalbierende

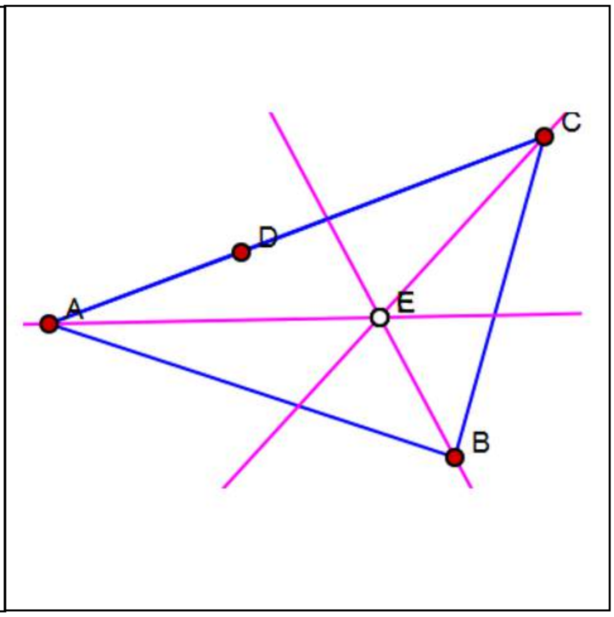
Notwendige Gesten

- Video 02 – Die Konstruktion einer Kreislinie aus ihrem Mittelpunkt und einem Punkt auf der Kreislinie
- Video 11 – Ein frei beweglicher Punkt wird zu einem Gleiter auf einem Kreis

Einführung zu Arbeitsblatt 7a | Die Winkelhalbierenden im Dreieck



Figur 1



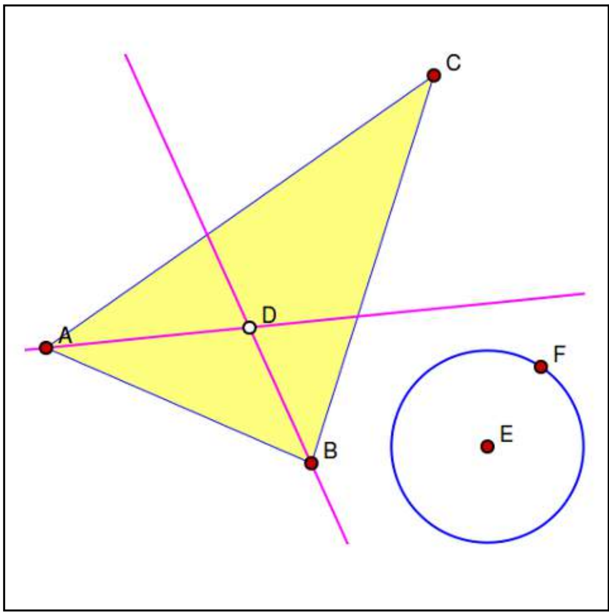
Figur 2

- Die Schülerinnen und Schüler zeichnen ein schiefes Viereck ABCD und dessen Diagonale [AC] ein. Sie zeichnen an den Ecken A, B und C die drei Winkelhalbierenden ein (→ Video 11). Es ergeben sich die Schnittpunkte E, F und G (Figur 1).
- Sie ziehen den Eckpunkt D auf die Diagonale [AC]. Dann ist ein Dreieck ABC (mit dem jetzt überflüssigen Punkt D) entstanden, in dem sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden (Figur 2).
  Dieser Sachverhalt ändert sich nicht, wenn am Punkt B gezogen wird.
- Anhand einer Zeichnung notieren sie sinngemäß: **In jedem Dreieck schneiden sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt. In einem Viereck ist das im Allgemeinen nicht der Fall.**

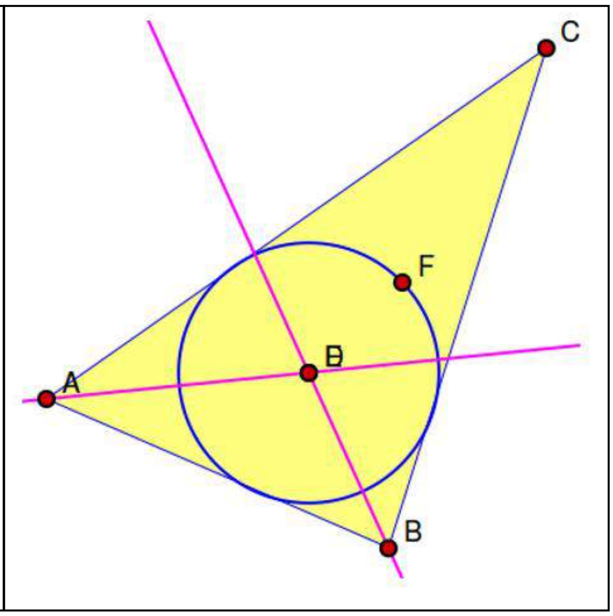
Ausblick

- Im Gegensatz zum Umkreismittelpunkt liegt der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden immer innerhalb des Dreiecks ABC.
- Es gibt auch nicht symmetrische Vierecke, in denen sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden. Muss dann auch die vierte Winkelhalbierende durch diesen Punkt verlaufen? Dieser Problemkreis führt zum **Tangentenviereck.**
- In welchen besonderen Vierecken schneiden sich alle vier Winkelhalbierenden in einem Punkt? Diese Fragestellung zielt auf **bestimmte symmetrische Vierecke**.

Einführung zu Arbeitsblatt 7b | Der Inkreis eines Dreiecks



Figur 1



Figur 2

- Die Schülerinnen und Schüler zeichnen in das Dreieck ABC zwei Winkelhalbierende und markieren deren Schnittpunkt D (Figur 1).
- Sie zeichnen mit Hilfe zweier beweglicher Punkte E und F die Kreislinie.
  Dieser Kreis soll nun so in das Dreieck ABC gezogen werden, dass er die Dreiecksseiten berührt, also zum **Inkreis** wird (Figur 2).
- Eine Zeichnung und ein entsprechender Satz dokumentieren das Ergebnis.

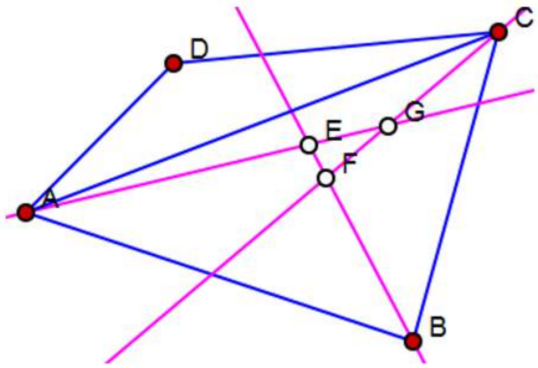
Anmerkung

Das Thema *Kreis und Tangente* sollte vor der Konstruktion des Inkreisradius behandelt werden.

Schülermaterial

Inhalt

- Arbeitsblatt 7a
- Arbeitsblatt 7b

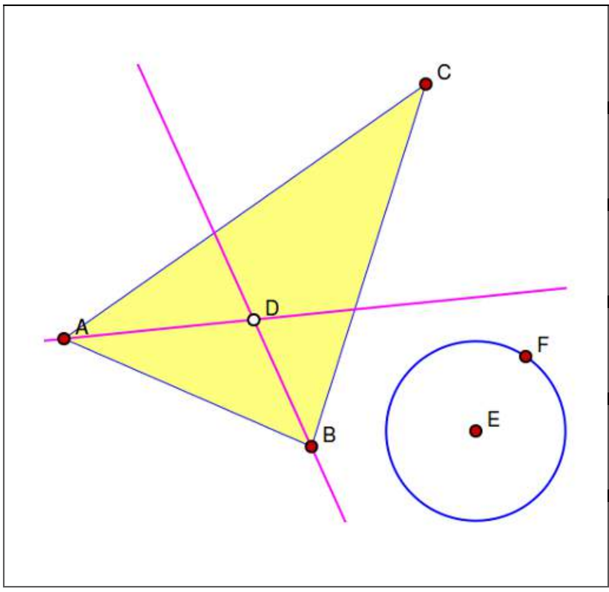


Konstruktionsanweisungen

- Zeichne das schiefe Viereck ABCD und die Diagonale [AC].
- Zeichne an den Ecken A, B und C jeweils die Winkelhalbierende ein (→ Video 11).
- Markiere die drei Schnittpunkte E, F und G dieser Winkelhalbierenden.

Arbeitsaufträge

- Ziehe den Punkt D auf die Diagonale [AC].
  Was beobachtest Du?
- Ziehe am Punkt B.
  Gilt deine Feststellung noch?
- Fertige eine entsprechende Zeichnung an.
  Notiere, was du festgestellt hast.



Konstruktionsanweisungen

- Zeichne das Dreieck ABC.
- Zeichne an den zwei Ecken A und B die Winkelhalbierende (→ Video 11) ein und markiere ihren Schnittpunkt D.
- Zeichne aus zwei frei beweglichen Punkten E und F einen Kreis (→ Video 02).

Arbeitsaufträge

- In das Dreieck ABC lässt sich nun ein besonderer Kreis zeichnen.
  Ziehe den Mittelpunkt E des blauen Kreises an eine geeignete Stelle im Dreieck und passe dann den Kreis mit Hilfe des Punktes F in das Dreieck ein.
- Früher hast du mit Hilfe von zwei Mittelsenkrechten den **Um**kreis eines Dreiecks erzeugt.
  Erfinde einen Namen für den Kreis, der hier in das Dreieck ABC eingepasst worden ist.
- Fertige eine Zeichnung an. Notiere deine Beobachtung.

Der THALES-Kreis – Der Satz des THALES

Lehrerhandreichung

Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zu Arbeitsblatt 8a

- Der Kreis als Ortslinie
- Die orientierte Winkelmessung

Notwendige Gesten zu Arbeitsblatt 8a

- Video 02 – Die Konstruktion einer Kreislinie aus ihrem Mittelpunkt und einem Punkt auf der Kreislinie
- Video 04 – Der Mittelpunkt einer Strecke
- Video 08 – Die Messung eines Winkels

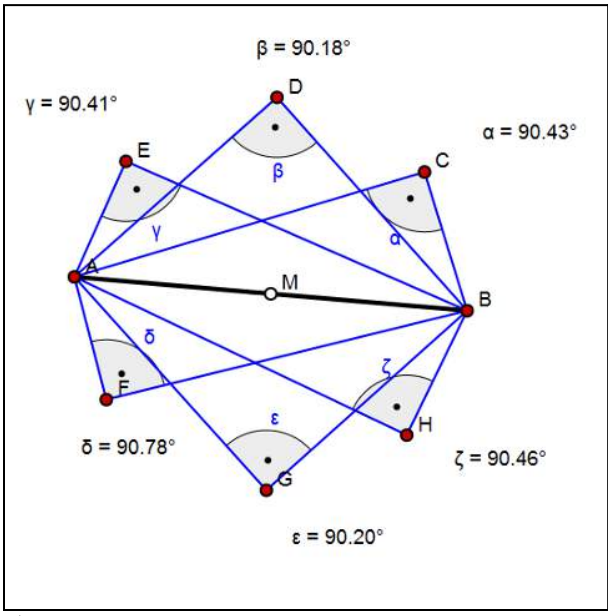
Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler zu Arbeitsblatt 8b

- Die Innenwinkelsumme im Dreieck
- Die Einteilung der Innenwinkel eines Dreiecks in rechte, spitze und stumpfe orientierte Winkel
- Eigenschaften des gleichschenkligen Dreiecks

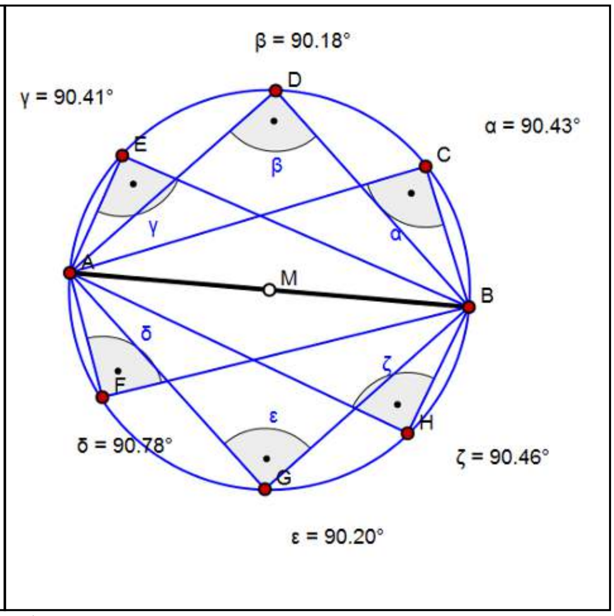
Notwendige Gesten zu Arbeitsblatt 8b

- Video 04 – Der Mittelpunkt einer Strecke
- Video 08 – Die Messung eines Winkels
- Video 09 – Die Zeichnung eines Kreisbogens
- Video 11 – Ein frei beweglicher Punkt wird zu einem Gleiter auf einem Kreis

Einführung zu Arbeitsblatt 8a | Der THALES-Kreis



Figur 1



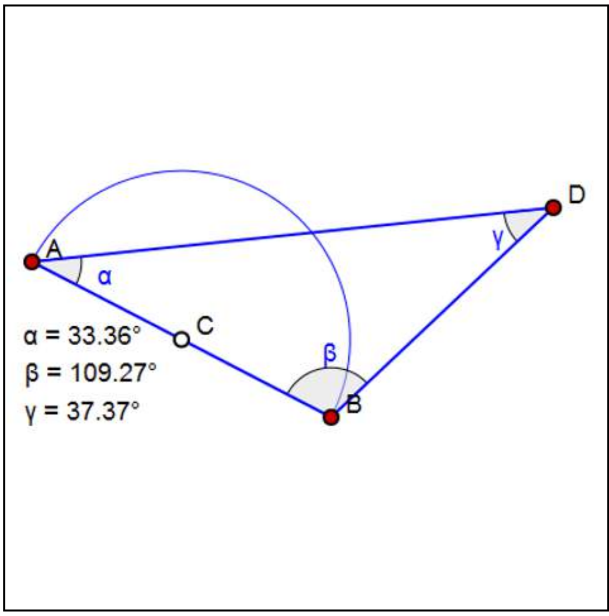
Figur 2

- Ausgehend von einer Strecke [AB] zeichnen die Schülerinnen und Schüler sechs Punkte (C, D, E, F, G, H) ein, die sich um die Strecke [AB] gruppieren. Sie zeichnen und messen jeweils den zugehörigen Winkel zu A und B, wie es im Arbeitsblatt für die Schülerinnen und Schüler dargestellt ist.
- Sie ziehen jeden Punkt so, dass der betreffende Winkel das Maß 90° besitzt (siehe Figur 1). Als sichtbarer Hinweis dafür erscheint im Winkelfeld der Punkt als Zeichen für den rechten Winkel.
- Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass ihre Bilder auf dem Tablet zwar etwas anders als beim Banknachbarn aussehen, dass sich aber anscheinend hüben wie drüben alle sechs Punkte auf einer Kreislinie angeordnet haben. Auf der Suche nach dem Kreismittelpunkt sticht ihnen am Ende der Mittelpunkt M der Strecke [AB] ins Auge, so dass diese Strecke als Kreisdurchmesser fungiert (siehe Figur 2).
- Zur Kontrolle zeichnen sie auf dem Bildschirm einen Kreis mit dem Mittelpunkt M durch einen dieser sechs Punkte (V2). Während der Zeichnung dieser Kreislinie (siehe Figur 2) ist darauf zu achten, dass der zu skizzierende Kreisbogen **nur durch einen dieser sechs Punkte** gezogen wird, an den anderen jedoch **deutlich vorbeiläuft**. Sonst wird immer ein Polygon und kein Kreis gezeichnet.
- Sie notieren sinngemäß: **Bei vorgegebener Strecke [AB] liegen alle Scheitel von rechten Winkeln, deren Schenkel durch A bzw. B verlaufen, auf der Kreislinie mit dem Durchmesser [AB]. (*)**

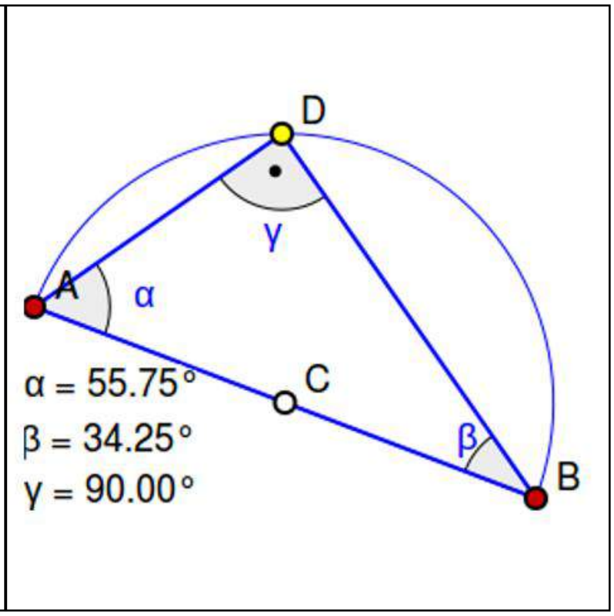
Anmerkungen

1. In (*) wurde die Umkehrung des Satzes von THALES formuliert.
2. Es bedürfte viel zu viel Zeit, um die Maßzahlen aller sechs Winkel exakt auf ein Maß von 90° zu trimmen. Diesen Umstand könnte die Lehrkraft zum willkommenen Anlass nehmen, mit den Schülerinnen und Schülern eine saubere Begründung zu erarbeiten, etwa:
   - Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC_1 mit der Hypotenuse [AB]. Spiegle dieses Dreieck am Hypotenusenmittelpunkt. Das Spiegelbild ist C_1'.
   - Begründe: Das entstandene Viereck $ABC_1'C_1$ ist ein Rechteck.
   - Betrachte den Umkreis dieses Rechtecks.
   - Zeichne weitere rechtwinklige Dreiecke ABC_2, ABC_3, (...).
   - Daraus ergibt sich: Alle Rechtecke, deren Diagonalen gleich lang sind, besitzen ein und denselben Umkreis.
   - Für die Zeichnung, die dazu angefertigt wird, zeichnen die Schülerinnen und Schüler zunächst die Strecke [AB] mit ihrem Mittelpunkt M. Dann legen sie das Geodreieck mehrfach so an, dass dessen Katheten durch A bzw. B verlaufen. Anschließend markieren sie jeweils die Lage des Scheitels des rechten Winkels des Geodreiecks und zeichnen die Katheten ein. Nur im Idealfall liegen alle diese Punkte auf dem zugehörigen THALES-Kreis; ein weiterer Anlass für eine saubere Begründung.
   - Andererseits kann anhand der Figur 2 der Begriff *Sehnenviereck* ins Spiel gebracht werden.
3. Der **Satz des THALES** aber geht von Punkten auf einer Kreislinie mit dem Durchmesser [AB] aus. Diese Punkte erweisen sich als Scheitel von rechten Winkeln, deren Schenkel durch A bzw. B verlaufen. Auch dieser Lehrsatz kann von den Schülerinnen und Schülern mit Hilfe einer Konstruktion auf ihrem Tablet/iPad selbst entdeckt werden (siehe Arbeitsblatt 8b).

Einführung zu Arbeitsblatt 8b | Der Satz des THALES



Figur 1



Figur 2

- Ausgehend von einer Strecke [AB] zeichnen die Schülerinnen und Schüler so wie in **Figur 1** einen Halbkreis über [AB] mit dem Mittelpunkt C. Außerhalb dieses Halbkreises setzen sie den zunächst freien Punkt D.
- Die Schülerinnen und Schüler messen die Innenwinkel des Dreiecks ABD.
  Wenn sich der Punkt D oberhalb des Halbkreises bewegt, bleibt der Winkel γ spitz.
- Dann wird der Punkt D auf den Halbkreis gezogen und zum Gleiter gemacht (→ Video 11).

Die Schülerinnen und Schüler erkennen während der Bewegung von D auf dem Halbkreisbogen analog zur **Figur 2**, dass stets $\gamma = 90°$ gilt (wenn D nicht auf A oder B liegt). Im Weiteren stellen die Schülerinnen und Schüler fest, dass stets $\alpha + \beta = \gamma = 90°$ gilt.

- Zur Begründung zeichnen die Schülerinnen und Schüler die Hilfsstrecke [CD] in das Dreieck ABC ein, so dass zwei gleichschenklige Teildreiecke entstehen. Der Rest kann (auch mit Hilfe der Lehrkraft) geklärt werden.
- Die Schülerinnen und Schüler sollen anschließend den Sachverhalt formulieren, der den Satz des THALES wiedergibt. Die Benutzung der Hilfestellung auf dem Arbeitsblatt **Wenn der Punkt D auf einem Halbkreis mit dem Durchmesser [AB] wandert, *dann haben alle Winkel ADB das Maß 90°.*** ist besonders für schwächere Schülerinnen und Schüler gedacht. Es muss beachtet werden, dass bei der Angabe von Winkeln oder von Dreiecken mit großen Buchstaben die Orientierung zu berücksichtigen ist.

- Sinngemäß ergibt sich:
  Ist die Strecke [AB] der Durchmesser eines Kreises und D ein Punkt auf der Kreislinie, dann sind alle Dreiecke ABD bzw. ADB rechtwinklig. (D = A und D = B sind dabei ausgeschlossen.)
- Im Nachhinein wird der Gleiter D wieder frei beweglich gemacht und dann ins Halbkreisinnere gezogen. Die Schülerinnen und Schüler stellen fest, dass dort der Winkel γ stets stumpf ist. Weiter stellt sich heraus, dass der Punkt D oberhalb des Halbkreises nur spitze Winkelmaße liefert.
- Die Schülerinnen und Schüler notieren diesen Sachverhalt.

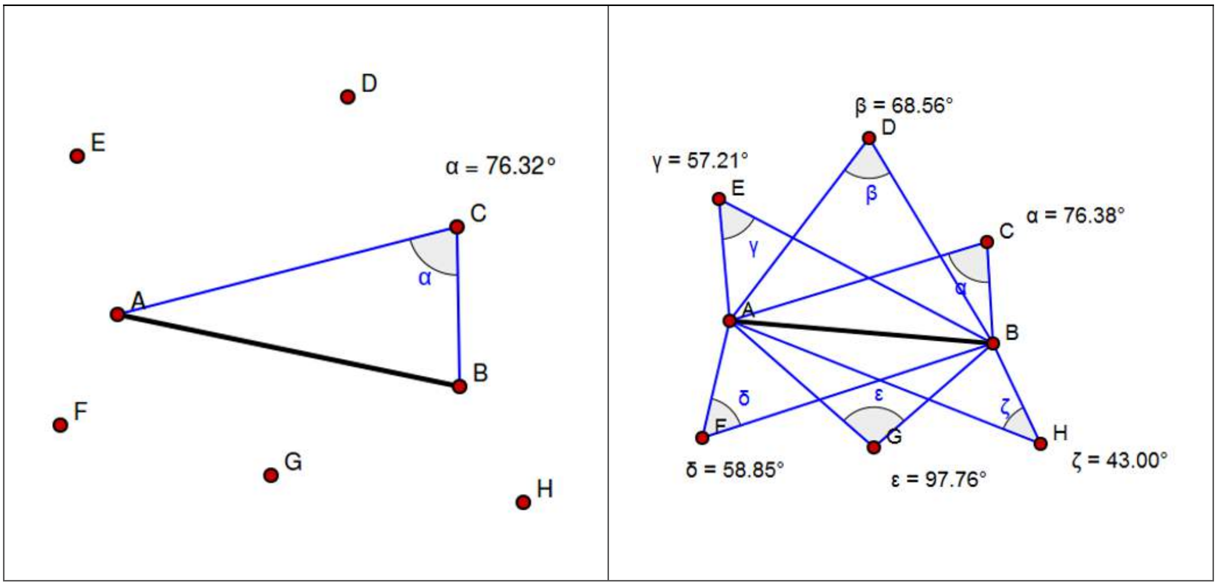
Anmerkung

Bei der Behandlung des **Randwinkelsatzes** bietet sich eine analoge Vorgehensweise wie beim Satz des THALES an.

Schülermaterial

Inhalt

- Arbeitsblatt 8a
- Arbeitsblatt 8b



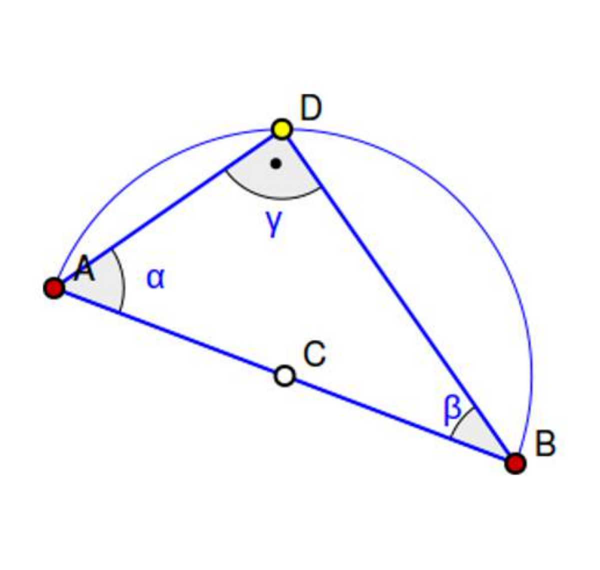
Figur 1 Figur 2

Konstruktionsanweisungen

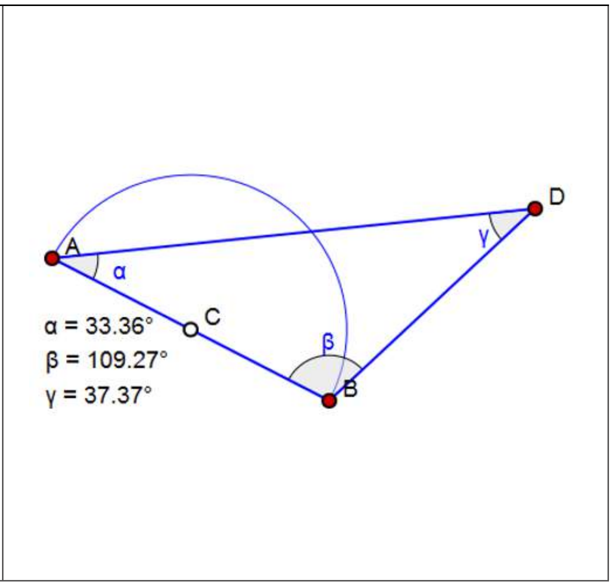
- Zeichne die Strecke [AB] und die sechs Punkte (C, D, E, F, G, H) etwa so wie in der Figur 1.
- Zeichne die Winkel von jedem dieser sechs Punkte zu A und B. Als Vorlage dient der Winkel ACB mit dem Winkelmaß α. Das dargestellte Winkelmaß ist nur ein Beispiel.
- Bestimme die Maße dieser sechs Winkel (→ Video 08).
  Dein Bildschirm sollte dann etwa so wie die Figur 2 aussehen. Die angegebenen Winkelmaße sind nur beispielhaft.

Arbeitsaufträge

- Bewege nun jeden der sechs Punkte (C, D, E, F, G, H) so, dass das betreffende Winkelmaß 90° beträgt.
- Auf welcher Ortslinie liegen diese sechs Punkte vermutlich?
  Bestätige deine Vermutung durch eine Konstruktion auf dem Bildschirm (→ Video 04 → Video 02).
- Fertige auf diesem Arbeitsblatt die entsprechende Zeichnung an.
  Notiere eine möglichst genaue Beschreibung dieser Punktmenge.



Figur 1



Figur 2

Konstruktionsanweisungen

- In der Figur 1 ist der Punkt C der Mittelpunkt des Halbkreises über [AB] (→ Video 04 → Video 09).
- Zeichne den Punkt D und miss die Innenwinkel des Dreiecks ABD (→ Video 08). Die angegebenen Winkelmaße stellen nur ein Beispiel dar.

Arbeitsaufträge

- Bewege den Punkt D oberhalb des Halbkreises.
  Beobachte dabei, wie sich das Winkelmaß γ ändert.
- Ziehe den Punkt D auf den Kreisbogen, so dass dieser Punkt zum Gleiter auf dem Halbkreis wird (→ Video 11). Bewege nun D auf dem Halbkreis und beobachte dabei die Innenwinkelmaße. Notiere, was du feststellst. Tausche dich darüber auch mit deinem Banknachbarn aus.
- Fertige eine Zeichnung an.
  Notiere eine Begründung für deine Beobachtungen.

Tipp

Zeichne eine Hilfslinie ein, die das Dreieck ABC in zwei Teildreiecke zerlegt. Welche besondere gemeinsame Eigenschaft besitzen diese beiden Teildreiecke?

- Notiere ein Ergebnis, das z.B. so beginnt: **Wenn der Punkt D auf einem Halbkreis mit dem Durchmesser [AB] wandert, dann (...) .**
- Löse nun den Punkt D vom Halbkreis, so dass D wieder frei beweglich wird.
  Bewege jetzt den Punkt D nur im **Inneren** des Halbkreises umher. Beobachte dabei das Winkelmaß γ.
  Bewege dann D **außerhalb** des Halbkreises. Beobachte erneut das Winkelmaß γ.
  Notiere, worin sich die Winkelmaße γ innerhalb und außerhalb des Halbkreises grundsätzlich unterscheiden.

Ein Motiv für die Konstruktion der Winkelhalbierenden

Lehrerhandreichung

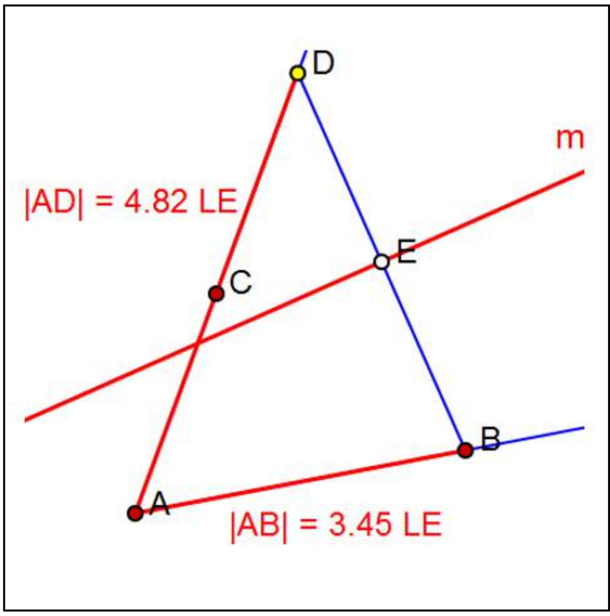
Das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler

- Die Konstruktion der Mittelsenkrechten
- Der Kreis als Ortslinie

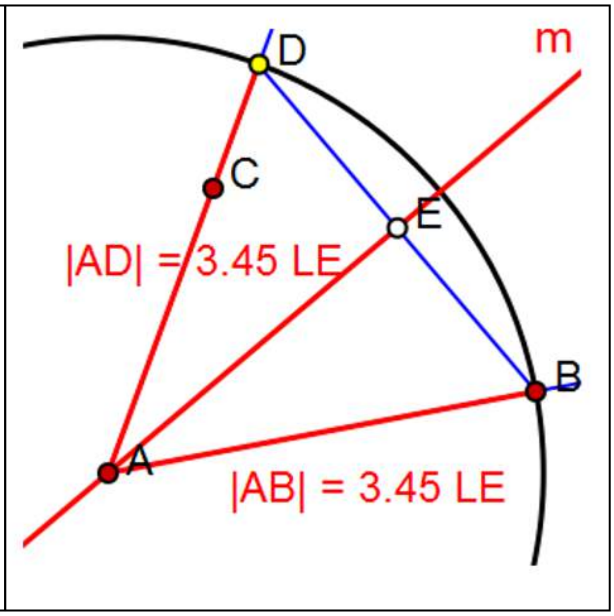
Notwendige Gesten

- Video 01 – Die Messung einer Streckenlänge
- Video 04 – Der Mittelpunkt einer Strecke
- Video 07 – Eine Senkrechte zu einer Geraden zeichnen
- Video 10 – Die Winkelhalbierende einzeichnen

Einführung zu Arbeitsblatt 9 | Die Konstruktion der Winkelhalbierenden



Figur 1



Figur 2

Die Schülerinnen und Schüler haben bereits gelernt, die Mittelsenkrechte und die Winkelhalbierende zu konstruieren. Jetzt wird - im Zuge einer Wiederholung - mit Hilfe der Eigenschaft des Kreises als Ortslinie ein Motiv für die Vorgehensweise während der Konstruktion der Winkelhalbierenden klar.

Zu Figur 1

- Der Punkt D ist ein Gleiter auf dem Schenkel [AC] des Winkels BAC.
- Zur Strecke [BD] ist m die Mittelsenkrechte.
- Die Strecken [AB] und [AD] werden eingezeichnet. Ihre jeweilige Länge wird gemessen.

Zu Figur 2

Die Schülerinnen und Schüler bewegen den Gleiter D so, dass m durch den Scheitel A des Winkels BAC verläuft.

Es stellt sich heraus, dass dann die Strecken [AB] und [AD] gleich lang sind.

- Also liegen B und D auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt A. Dieser Umstand wird für den ersten Konstruktionsschritt der Winkelhalbierenden verwendet.
- Im zweiten Schritt konstruieren die Schülerinnen und Schüler die Mittelsenkrechte zu [BD].

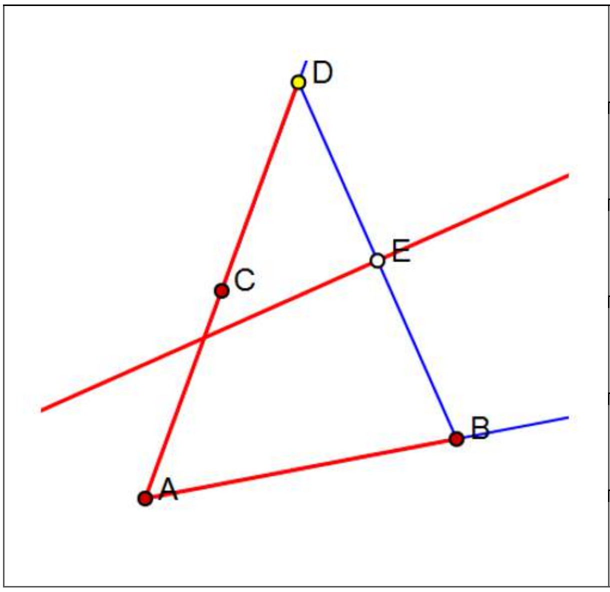
Anmerkung

Die Lehrkraft sollte mit den Schülerinnen und Schülern den Einfluss der frei wählbaren Kreisradien auf die Zeichengenauigkeit erörtern. Die Tatsache, dass die beiden Schnittpunkte der Kreisbögen, die zur Konstruktion der Mittelsenkrechten m gezeichnet werden, und der Scheitel A aus Symmetriegründen auf einer Geraden liegen müssen, ist einerseits eine Kontrollmöglichkeit für die Zeichengenauigkeit im Heft, anderseits ist die Gerade m, die ja gleichzeitig Winkelhalbierende ist, bereits durch A und einen Schnittpunkt auf m eindeutig festgelegt.

Schülermaterial

Inhalt

- Arbeitsblatt 9



Konstruktionsanweisungen

- Zeichne den Winkel BAC.
- Setze den Punkt D als Gleiter auf die Halbgerade [AC]. Die Gerade m ist die Mittelsenkrechte der Strecke [BD] (→ Video 04 → Video 07).
- Zeichne die Strecken [AB] und [AD] ein und miss deren Länge (→ Video 01).

Arbeitsaufträge

- Ziehe nun den Gleiter langsam auf der Halbgeraden entlang, bis die Mittelsenkrechte m durch den Scheitel A des Winkels BAC verläuft.
  Welche Lage hat m jetzt vermutlich im Winkel BAC?
  Überprüfe deine Vermutung am Bildschirm (→ Video 10).
- Vergleiche nun die Längen der Strecken [AB] und [AD].
  Auf welcher Ortslinie müssen demnach die Punkte B und D liegen? Begründe deine Antwort.
- Zeichne einen Winkel und konstruiere dessen Winkelhalbierende.
  Notiere deine Vorgehensweise.

Autoren

Werner Heubeck und Edgar Höniger

Betreuung

Universität Bayreuth
Forschungsstelle Mobiles Lernen mit digitalen Medien
Prof. Dr. Peter Baptist

Bezugsquellen

http://em.uni-bayreuth.de

https://owncloud.rsstaff.by.to/material

Impressum

Herausgeber: Verein MINT-EC®
Verantwortlich: Dr. Niki Sarantidou
Mitarbeit: Matthias Rech
Gestaltung Umschlag: www.rohloff-design.de

Stand: Berlin, Mai 2015

Bisher in der MINT-EC-Schriftenreihe erschienene Titel

IN DER RUBRIK **TALENTE FÖRDERN**

- Das MINT-EC-Zertifikat – Auszeichnung für besondere Schulleistungen im MINT-Bereich

IN DER RUBRIK **UNTERRICHT GESTALTEN**

- Materialien zur Informationstechnischen Grundbildung (ITG)
- Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche auf dem Tablet – sketchometry im Unterricht

MINTec
Das nationale Excellence-Schulnetzwerk

Verein MINT-EC®
Poststrasse 4/5
10178 Berlin

Tel.: 030.40006732
Fax: 030.40006735

www.mint-ec.de
www.facebook.com/vereinmintec

www.mint-ec.de

9 783945 452035

ISBN-Nummer: 978-3-945452-03-5