Satellitennavigation:
Alles eine Frage der Zeit …

Abb. 1: Astronomische Uhr in Prag

Während wir die Zeit als unveränderlich und kontinuierlich fließend wahrnehmen, hat uns Einsteins Relativitätstheorie etwas anderes gezeigt: Zeit ist relativ! Es gibt keine „absolute“ Zeit! Was aber hat Zeitmessung mit Satellitennavigation zu tun? Bild: Maros Mraz (Maros)

Einleitung

„Time is what prevents everything from happening at once…“
John Wheeler (1911-2008)

Dieses Zitat des theoretischen Physikers John Wheeler heißt übersetzt in etwa: „Zeit verhindert, dass alles auf einmal passiert“. Es ist der Versuch einer Definition von Zeit – eines uns scheinbar völlig selbstverständlichen, bei genauerer Betrachtung aber höchst interessanten, ja ominösen Begriffs! Was aber hat Zeit – genauer die Zeitmessung – mit Navigation zu tun? Diese spannende Frage wird im DLR_School_Lab-Experiment „Satellitennavigation“ beantwortet.

Die Navigation (von lat. „navem agere“ ein Schiff lenken) stellte die Menschen, insbesondere natürlich die Seefahrer, schon im Altertum vor das Problem der Zeitmessung: Um die genaue Position eines Schiffes, insbesondere der geografischen Länge, zu bestimmen, ist die Kenntnis der exakten Uhrzeit entscheidend. Dieses so genannte „Längenproblem“ wurde erst 1759 mit der Erfindung des Chronometers „H4“ durch John Harrison gelöst. Harrison gelang es, eine

Uhr zu entwickeln, die einerseits eine sehr hohe Ganggenauigkeit besaß, andererseits aber nicht durch äußere Einflüsse wie z.B. starken Seegang gestört wurde. Für seine bahnbrechende Erfindung erhielt Harrison 1773 vom britischen Parlament ein Preisgeld von 20.000 Pfund.

Bezug zur Forschung

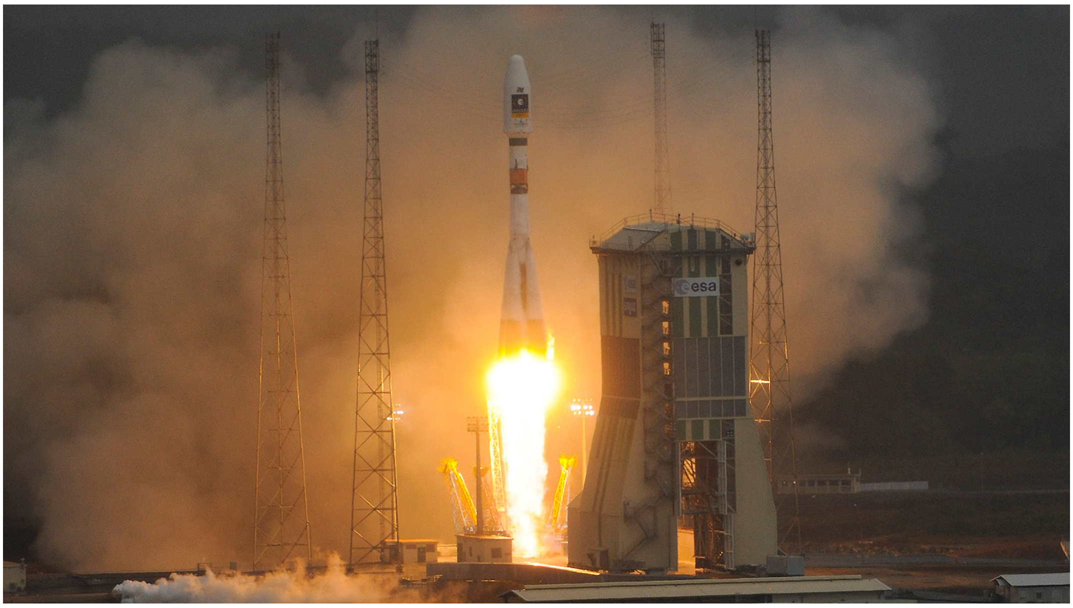


Abb. 2: Start der ersten beiden Galileo-Satelliten

Am 21. Oktober 2011 wurden die ersten beiden von insgesamt 30 geplanten Satelliten des europäischen Satellitennavigationssystems Galileo vom europäischen Weltraumzentrum in Französisch-Guayana ins All gebracht. Das Galileo-System soll Satellitennavigation mit bisher nicht da gewesener Genauigkeit ermöglichen. Im Gegensatz zu den bereits existierenden Systemen, dem amerikanischen GPS und dem russischen GLONASS, ist Galileo das erste zivile Satellitennavigationssystem. Wissenschaftler verschiedenster Institute und Einrichtungen des DLR sind an dem Großprojekt beteiligt und liefern wesentliche Beiträge, nicht zuletzt bei der Kontrolle der Satelliten vom Galileo-Kontrollzentrum GCC in Oberpfaffenhofen aus.

Das Experiment

Euer Auftrag lautet, das Prinzip der Satellitennavigation nachzuspielen. Hierzu werdet ihr euch in Gruppen (mindestens fünf Schüler pro Gruppe) aufteilen und innerhalb der Gruppen das Satellitennavigationssystem nachbilden (Satelliten, Empfänger, Kontrollstation). In drei Schritten nähert ihr euch bei zunehmender Komplexität an die Funktionsweise eines Satellitennavigationssystems an.

Materialien und Hilfsmittel

Jede Gruppe benötigt:

Mindestens 1 (besser 3) GPS-Empfänger mit Anzeige der Momentangeschwindigkeit (z.B. Smartphone)	☐
1 Stoppuhr	☐
1 akustischen Signalgeber („Startpistole“)	☐
1 Maßband (30 m)	☐
Zeichenpapier	☐
Zirkel, Geodreieck, Bleistift	☐
Mindestens 1 PC pro Gruppe mit dynamischer Geometriesoftware GeoGebra. Frei erhältlich unter: http://www.geogebra.org/cms/	☐

Vorbereitung, Aufbau und Durchführung

Step 1:
Vorbereitung

Um zu verstehen, wie Satellitennavigation prinzipiell funktioniert, bearbeitet bitte zuerst das aus vier Seiten bestehende Arbeitsblatt „AB1" „Navigieren mit Winkeln und Entfernungen".

Step 2:
Laufzeitmessung ohne Uhren

Im Folgenden sollt ihr die Funktionsweise des Satellitennavigationssystems „Global Positioning System" GPS nachvollziehen. Dazu spielt ihr in eurer Gruppe nach, wie die Positionsbestimmung funktioniert. Als Hilfsmittel habt ihr einen GPS-Empfänger mit Geschwindigkeitsanzeige.

Durchführung

Genau wie beim richtigen GPS sollt ihr die Position eines Menschen bzw. einer Gruppe (kurz Empfänger) mit Hilfe des Entfernungsverfahrens bestimmen: Ihr messt hierzu, wie weit der Empfänger von den einzelnen Satelliten entfernt ist – mit einem Unterschied: Die Satelliten seid ihr! Am besten haltet ihr euch dabei genau an die folgende Anleitung – dann klappt's auch!

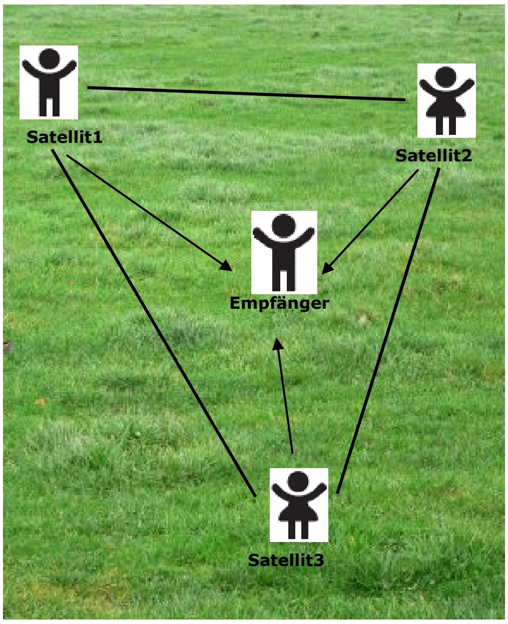


Abb. 3: Satelliten-Empfänger-Konstellation

Zwei Schüler „spielen" den Empfänger, drei andere sind „Satelliten" (eigentlich eher Satellitensignale). Je nachdem, wie groß eure Gruppe ist, können z.B. die Satelliten natürlich auch aus mehreren Schülern bestehen! (siehe Abb.3)

Als erstes müsst ihr eure Satelliten in Position bringen. Wie beim echten GPS ist es absolut notwendig, dass die Positionen der einzelnen Satelliten genauestens bekannt bzw. festgelegt sind. Dazu erstellt ihr eine maßstabsgetreue Planskizze, auf der ihr die Positionen der Satelliten festlegt (verwendet hierzu AB2 „Laufzeitmessung(1)"). Mit Hilfe des Maßbandes könnt ihr dann diese Positionen im Freien nachstellen (siehe Abb. 4). Die Entfernungen sind übrigens nur Beispiele; ihr könnt auch andere Entfernungen verwenden!

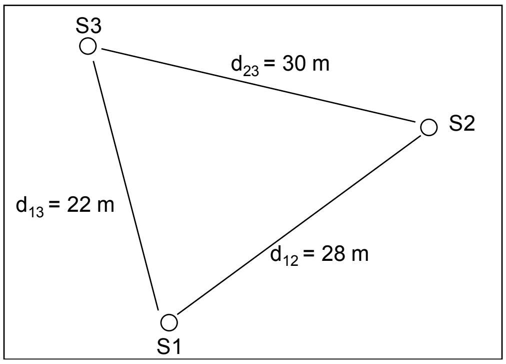


Abb. 4: Mögliche Konstellation

Nachdem die Satelliten in Position sind, kann die Messung beginnen: Der Empfänger stellt sich irgendwo zwischen die Satelliten. Daraufhin laufen die Satelliten nacheinander geradewegs zum Empfänger und kontrollieren mit ihrem GPS-Empfänger ihr Tempo: Lauft am besten alle genau 4 km/h (das sind ca. 1 m/s) schnell. Dabei zählt einer der beiden Schüler der Empfängergruppe – noch ohne Uhr, also einfach nur zählen – die Sekunden und weiß damit ungefähr, wie lange die einzelnen Satellitensignale unterwegs waren. Die einzelnen Laufzeiten werden vom anderen Schüler der Empfängergruppe in der Tabelle auf AB2 notiert. Anschließend werten alle Mitglieder der Gruppe (Satelliten und Empfänger) ihre Messwerte mit Hilfe der entsprechenden Arbeitsblätter und der Geogebra-Datei aus.

Step 3:
Laufzeitmessung mit Stoppuhr

Um eure Positionsbestimmung zu verbessern, ist es sinnvoll, die Laufzeitmessung genauer zu gestalten. Führt dazu eine Messung wie in Step 2 durch, verwendet aber zur Zeitmessung eine Stoppuhr. Tragt eure Ergebnisse und eure Satellitenkonstellation in AB3 „Laufzeitmessung(2)“ ein.

Step 4:
Realistische Laufzeitmessung

Leider können die Satellitenempfänger, die man bei einem Satellitennavigationssystem wie Galileo verwendet, nicht wissen, zu welchem Zeitpunkt ein Satellitensignal ausgesendet wird. Darum können sie auch nicht einfach die Zeit stoppen, die das Signal unterwegs ist!
Mit einem Trick ist es ihnen aber dennoch möglich, ihre Position mittels Laufzeitmessung zu berechnen. Und hier kommen die Kontrollstationen wie z.B. das Galileo-Kontrollzentrum GCC in Oberpfaffenhofen ins Spiel: Eine zentrale Aufgabe eines solchen Kontrollzentrums ist es, dafür zu sorgen, dass die auf den Satelliten eingebauten Atomuhren alle möglichst genau gleich laufen. Man sagt, die Uhren werden synchronisiert. Dabei dürfen die Uhren auf den Galileo-Satelliten in einem Jahr nur um deutlich weniger als eine Millionstel Sekunde von einander abweichen!

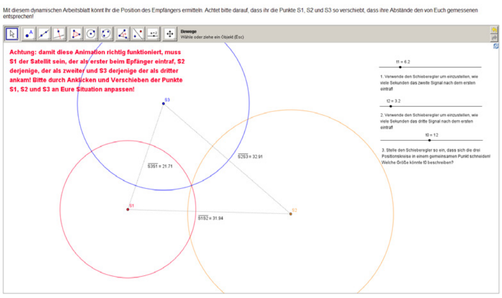


Abb. 5: Screenshot der Animation „Uhrensynchronisation“

Bringt nun eure Satelliten wie zuvor wieder in Position. Der zweite Schüler der Empfängergruppe dient nun gleichzeitig als „Kontrollzentrum“ und sorgt dafür, dass alle drei Satellitensignale gleichzeitig starten. Die Satellitensignale haben nach wie vor alle dieselbe Geschwindigkeit von ca. 4 km/h!

Sobald das erste „Signal“ beim Empfänger angekommen ist, startet dieser die Stoppuhr und misst, wie viele Sekunden später die weiteren Signale eintreffen. Beispiele: Als erstes kommt Satellit 2 (kurz S2) an. Jetzt wird die Stoppuhr gestartet und gemessen, dass S1 beispielsweise 5,3 s später ankommt als S2 und dass S3 sogar 7,2 s später als S2 eintrifft.

Die entsprechenden Werte werden auf AB4 „Uhrensynchronisation“ notiert.

Wertet eure Messung anschließend mit der zweiten Seite von AB4 aus. Zur Auswertung benötigt ihr außerdem die Datei „Uhrensynchronisation.html“.

Step 5:
Einen Schritt weiter gedacht …

Die Satellitensignale breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit – das sind ca. 300.000 km/s – rasend schnell aus. Daher machen sich bereits sehr kleine Messfehler von einigen Milliardstel Sekunden stark bemerkbar. Überlegt euch mit Arbeitsblatt 5 „Einstein und die Satellitennavigation“, warum die Einsteinschen Relativitätstheorien einen großen Einfluss auf die Satellitennavigation haben und warum man für Satellitennavigationssysteme die besten Uhren benötigt, die es gibt.

Hinweis: Die Einsteinschen Relativitätstheorien sind nicht nur verblüffend, sondern auch einigermaßen komplex. Lasst euch beim Bearbeiten von AB5 daher von eurem Lehrer bzw. eurer Lehrerin helfen.

Weiterführende Links

DLR_next: Bis auf den Meter genau: Navigation mit Galileo
http://www.dlr.de/next/desktopdefault.aspx/tabid-6804/11164_read-25462/

DLR_next: Einstein für Einsteiger
http://www.dlr.de/next/desktopdefault.aspx/tabid-6934/11454_read-26611/

HINWEIS

Die hier beschriebenen Mitmach-Experimente wurden sorgfältig ausgearbeitet. Sie können jedoch auch bei ordnungsgemäßer Durchführung und Handhabung mit Gefahren verbunden sein. Die hier vorgeschlagenen Mitmach-Experimente sind ausschließlich für den Einsatz im Schulunterricht vorgesehen. Ihre Durchführung sollte in jedem Fall durch eine Lehrkraft betreut werden. Die Richtlinien zur Sicherheit im Schulunterricht sind dabei einzuhalten.

Das DLR kann keine Garantie für die Richtigkeit, Vollständigkeit und Durchführbarkeit der hier beschriebenen Experimente geben. Das DLR übernimmt keine Haftung für Schäden, die bei Durchführung der hier vorgeschlagenen Mitmach-Experimente entstehen.

Informationen für Lehrer

Fächer

Physik, Mathematik

Alter/Schwierigkeitsgrad

Ab ca. Jahrgangsstufe 7 (bis Step 4, Step 5 ab Jahrgangsstufe 10)

Dauer des Experiments

Jeder einzelne „Step" kann als eigene Unterrichtsstunde behandelt werden. Evtl. lassen sich die einzelnen Messungen im Freien zu einer Stunde zusammenfassen. Ideal ist der Unterrichtsgang als Jahresabschluss vor den Sommerferien, wenn in diesem Schuljahr die Dreieckskonstruktionen durchgenommen wurden. Step 5 kann als Additum für besonders interessierte Schüler/innen betrachtet werden. Die Grundideen der Relativitätstheorie sollten allerdings bereits bekannt sein.

Es ist auch möglich, lediglich AB1 als Anwendung zum Thema Konstruktionen bearbeiten zu lassen. Zeitaufwand dafür (mit Besprechungen usw.): ca. zwei Schulstunden.

Lernziele

Dreieckskonstruktionen
Dynamische Geometriesoftware
Zeit und Zeitmessung
Relativitätstheorie

Erweiterungen

Es wäre denkbar und sinnvoll, Step 5 deutlich zu erweitern.

Kontakt

Tobias Schüttler, DLR_School_Lab Oberpfaffenhofen
Tobias.Schuettler@dlr.de

Arbeitsblätter

AB1: Navigieren mit Winkeln und Entfernungen

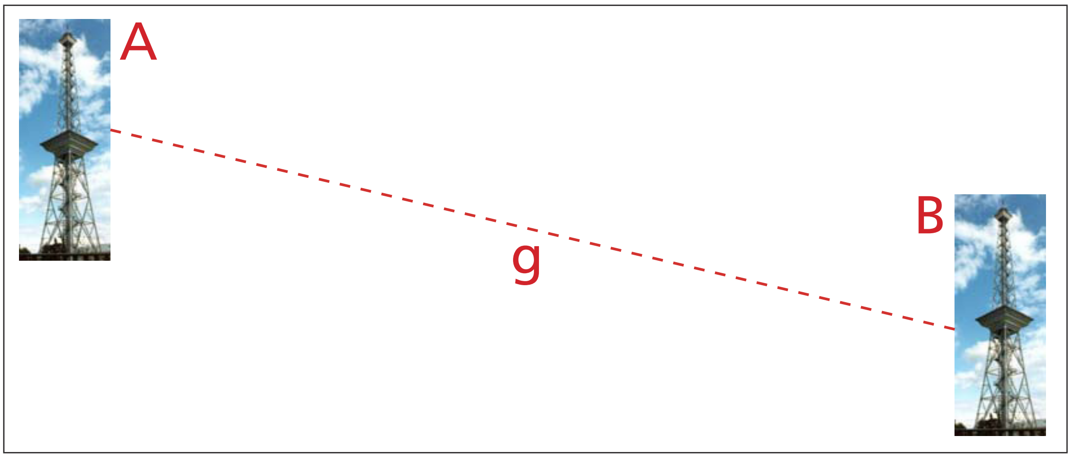
Navigation oder die Frage „Wo bin ich und wo geht's lang?" ist ein uraltes Thema. Schon in der Frühzeit der Menschheitsgeschichte versuchten Menschen möglichst schnell und sicher von A nach B zu kommen. Nun ist das zu Lande noch recht einfach, wie ein Beispiel zeigt: „Verlasst das Dorf über die große Brücke, durchquert den Alten Wald auf der Straße, lasst euch unterwegs nicht von Landstreichern ansprechen und eh ihr's euch verseht seid ihr bei mir!"

Aber wie sieht das Ganze auf dem Meer aus? Hier kann man nicht einfach sagen: „Biegt einfach bei der nächsten Welle links ab!"

Das Wort „Navigation" kommt vom lateinischen „navem agere" (ein Schiff führen), also gerade aus der Seefahrt. Im Folgenden lernt ihr zwei moderne Navigationsverfahren kennen, die es Seeleuten und Piloten heutzutage ermöglichen, sich auf oder über den Weltmeeren nicht zu verirren.

Peilverfahren
Oder Navigieren mit Winkeln

Auf der ganzen Welt verteilt befinden sich heutzutage Funkstationen, die Seefahrern und Piloten dabei helfen, sich zurechtzufinden. Das Bild zeigt schematisch die Position von zwei solchen Stationen, A und B. Die Position sowie die Entfernung dieser Stationen wurden ganz genau ausgemessen. Mit einem geeigneten Messgerät, nämlich einem so genannten Radiokompass, kann der Navigator genau herausfinden, unter welchem Winkel – bezogen auf die Verbindungslinie g der beiden Stationen – das Funksignal ausgesendet wurde.



Aufgabe 1

Der Navigator hat zu der Funkstation A einen Winkel von $\alpha = 30°$ und zur Station B einen Winkel von $\beta = 40°$ gemessen. Ermittle die beiden möglichen Positionen des Schiffs durch eine Zeichnung im Bild auf der ersten Seite des Arbeitsblattes.

Warum gibt es zwei Möglichkeiten?

Welche zusätzliche Information wäre nötig, damit man nur eine einzige Position erhält?

Entfernungsverfahren

Wie du dir sicher vorstellen kannst, ist es unglaublich aufwändig, auf der ganzen Erde verteilt Funkstationen zu betreuen und zu reparieren – nicht auszudenken, was passieren könnte, wenn ein Pilot im Landeanflug bei Nacht und ohne Sicht kein Funksignal mehr bekäme! Daher baut die europäische Raumfahrtagentur ESA zurzeit das Satellitennavigationssystem Galileo: mit Hilfe von 30 Satelliten, die in fast 24.000 km Höhe um die Erde kreisen, soll für zivile Nutzer – also auch für dich, aber auch für Airlines usw. – eine metergenaue Navigation möglich werden!

Aufgabe 2

Welche zwei wesentlichen Unterschiede gibt es zwischen einem Navigationssatelliten und einer Funkstation auf dem Boden?

1. ______________________________

2. ______________________________

Warum kann man bei der Satellitennavigation das Peilverfahren nicht anwenden?

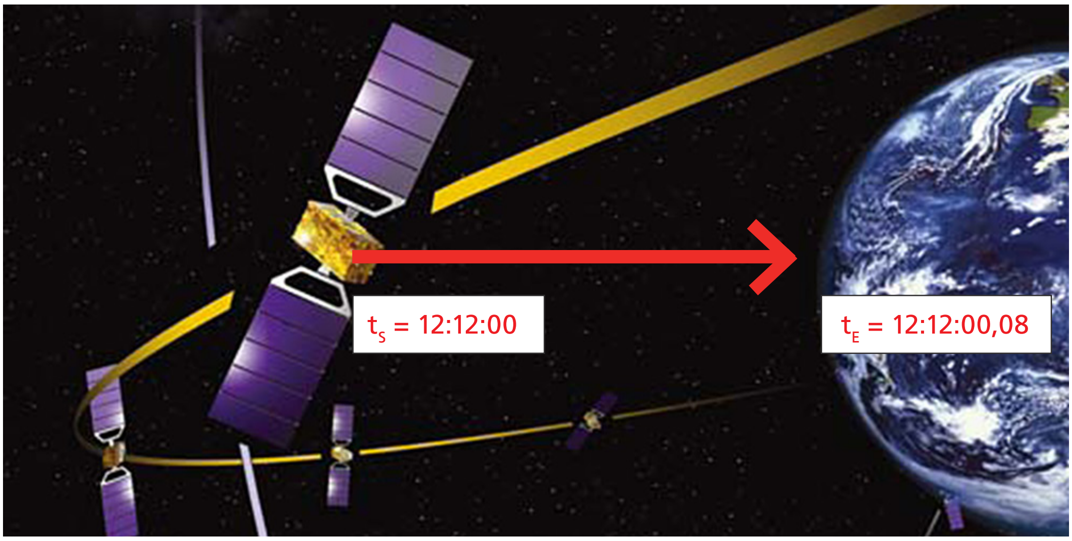
____

____

Bei der Satellitennavigation misst man keine Winkel zu den Satelliten, sondern die Entfernung der Satelliten zum Empfänger. Das ist allerdings gar nicht so leicht – schließlich kann der Satellit nicht einfach ein Maßband auf die Erde werfen! Deshalb wendet man einen physikalischen Trick an: Die Satelliten senden Funksignale in Richtung Erde aus. In diesen Funksignalen stecken im Wesentlichen drei Informationen:

1. Wann wurde das Signal ausgesendet?
2. Von welchem Satelliten kommt das Signal?
3. Wo befindet sich der Satellit momentan?

Sobald der Empfänger dasSatellitensignal empfangen hat, muss er im Prinzip nur noch bei sich auf die Uhr schauen – und schon weiß er, wie lange das Funksignal unterwegs war.



Aufgabe 3

Entnimm der Grafik, wie lange das Signal vom Satelliten bis zum Empfänger gebraucht hat.

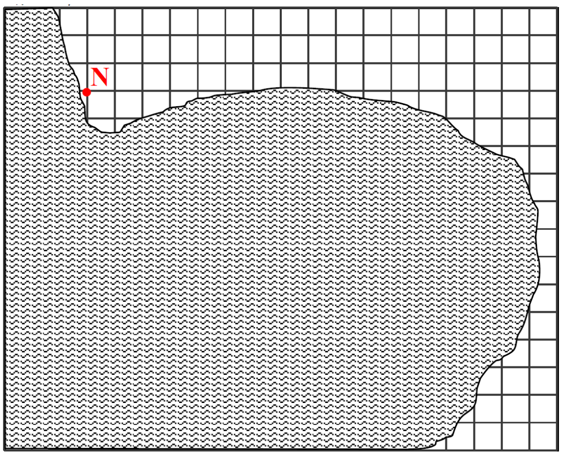
Signallaufzeit t = ………………………………… Sekunden

Berechne mit der Signallaufzeit, wie weit der Satellit vom Empfänger entfernt ist.
Hinweis: Funksignale breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit also ca. 300.000 km/s aus!

Jetzt weißt du, wie man (zumindest theoretisch) die Entfernung zu einem Satelliten messen kann. Wie aber kann man damit die Position auf der Erde bestimmen? Weil sich's dreidimensional so schwer zeichnen lässt, wollen wir uns die Situation in zwei Dimensionen, also in einer Ebene wie z.B. auf dem Meer überlegen:

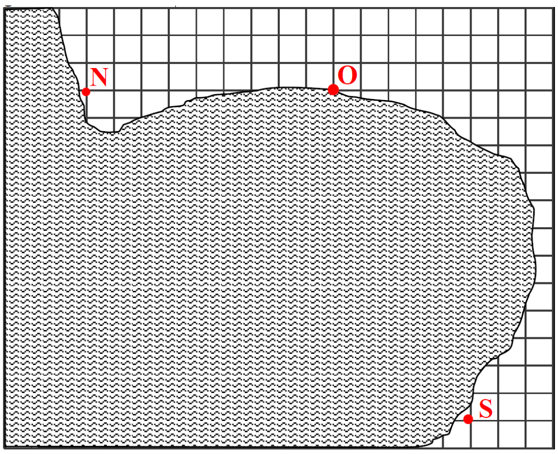
Aufgabe 4

Der Navigator eines Schiffs hat die Entfernung d_N zum Nordufer (Punkt N) bestimmt:
d_N = 4,6 cm auf der Karte:



Konstruiere alle möglichen Orte, an denen sich das Schiff befinden kann!
Wie du siehst, reicht eine einzige Entfernungsangabe noch nicht aus, um die Position eindeutig zu bestimmen. Hat man allerdings noch zwei weitere Entfernungen, sieht die Sache schon ganz anders aus:

Konstruiere die Position des Schiffs, wenn d_N = 4,6 cm, d_O = 2,2 cm und d_S = 4,8 cm gemessen wurde!



Zusammenfassung (Lückentext)

Bei der Satellitennavigation wird die Position des Empfängers mit dem ………………..........

-verfahren gemessen. Im Zweidimensionalen, also in der ……………………………, muss man

hierzu die Entfernung zu mindestens …… Punkten, deren Position bekannt ist (Sendern) messen.

Um die Entfernung zu Satelliten zu bestimmen, wird ein Trick angewendet: Man misst die

……………………………, die ein Funksignal braucht, um vom ………………………….. zum

……………………………… zu gelangen. Die ……………………………… multipliziert mit der

Lichtgeschwindigkeit (…………………………… km/s) ergibt die Entfernung zum Satelliten.

Für „Brainies“

Dir ist bestimmt aufgefallen, dass unsere Welt nicht zweidimensional ist! Wie viele Entfernungsmessungen muss man im Dreidimensionalen durchführen, um die Position eindeutig bestimmen zu können? Wie viele Satelliten muss ein Empfänger daher mindestens empfangen?

……………… Satelliten

In der Ebene gilt:

- Weiß man die Entfernung d zu einem Punkt P, kann man sich auf einem Kreis um P mit Radius d befinden.
- Weiß man die Entfernung zu zwei Punkten, kann man sich auf zwei Punkten befinden.
- Weiß man die Entfernung zu drei Punkten, so kennt man seine Position genau.

Formuliere ähnliche Sätze für die Situation im dreidimensionalen Raum!

Wie alle Messungen sind auch Zeitmessungen nie zu 100% genau. Berechne, welche Abweichung in der Entfernung ein Messfehler von einer Millionstel Sekunde bei der Satellitennavigation ausmacht.

Welche Voraussetzung müssen die Uhren des Empfängers und der Satelliten erfüllen, damit Navigation möglich ist? Welche Probleme siehst du hierbei?

AB2 Laufzeitmessung (1)

Erstellt hier eure maßstabsgetreue Skizze der Satellitenkonstellation:

Tragt eure Messwerte in die Tabelle ein:

	Satellit 1	Satellit 2	Satellit 3
Laufzeit (gezählt)			
Geschwindigkeit in m/s			
Entfernung			

Ermittelt mit Hilfe eurer Messwerte und einem Zirkel die ungefähre Position des Empfängers. Nennt (mindestens!) zwei Gründe, warum eure Messung relativ ungenau ist.

1. Grund: ________________

2. Grund: ________________

AB3 Laufzeitmessung (2)

Erstellt hier eure maßstabsgetreue Skizze der Satellitenkonstellation:

Tragt eure Messwerte in die Tabelle ein:

	Satellit 1	Satellit 2	Satellit 3
Laufzeit (Stoppuhr)			
Geschwindigkeit in m/s			
Entfernung			

Ermittelt mit Hilfe eurer Messwerte und einem Zirkel die ungefähre Position des Empfängers. Warum kann man dieses Prinzip, wonach der Empfänger misst, wie lange das Signal bis zu ihm unterwegs war, bei der realen Satellitennavigation nicht anwenden?

Antwort:

AB4 Uhrensynchronisation

Erstellt hier eure maßstabsgetreue Skizze der Satellitenkonstellation:

Tragt eure Messwerte in die Tabelle ein:
In diesem (realistischen!) Fall können wir nicht auf Anhieb sagen, wie weit die Satelliten tatsächlich vom Empfänger entfernt sind. Wir sprechen daher von einer so genannten „Pseudoentfernung" (englisch: „pseudorange")

	Satellit 1	Satellit 2	Satellit 3
Laufzeit (gezählt)			
Geschwindigkeit in m/s			
Pseudoentfernung			

Hinweis: Bei dem Satelliten, der zuerst am Empfänger eintrifft, schreibt ihr als Laufzeitdifferenz (und natürlich auch als Pseudoentfernung) 0 s (bzw. 0 m).

Notizen:

Auswertung der Uhrensynchronisation

Um die Position des Empfängers zu bestimmen, könnt ihr nun nicht mehr einfach entsprechende Positionskreise um die Satelliten ziehen. Warum?

Antwort: ______________________________

____

____

Öffnet die Datei „Uhrensynchronisation.html“ und passt sie an eure Messwerte an.
Messt die Abstände, die die Satelliten S1, S2 und S3 vom Empfänger hatten.

S1: ………………………… S2: ………………………… S3: …………………………

Bestimmt nun, wie lange die einzelnen Satellitensignale tatsächlich unterwegs waren.

S1: ………………………… S2: ………………………… S3: …………………………

Für welche Größe steht t0 in der Animation der Datei „Uhrensynchronisation.html“?

Antwort: ______________________________

Bei der realen Satellitennavigation wird mit dem ersten Satellitensignal – vereinfacht gesprochen – die Empfängeruhr gestellt. Erkläre unter Bezugnahme auf die obigen Ergebnisse, wie man auf diese Weise eine exakte Uhrzeit erhält.

Antwort: ______________________________

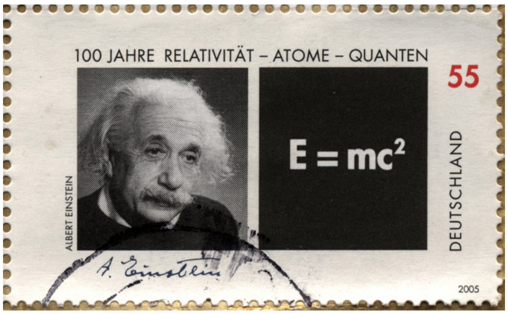
____

____

____

____

AB5 „Einstein und die Satellitennavigation“



Der berühmte Physiker Albert Einstein (1879-1955) fand heraus, dass die Zeit nicht überall gleich schnell vergeht! Je nachdem wie schnell man sich bewegt und auch wie nah man sich an der Erde bzw. einem anderen Körper mit großer Masse befindet, vergeht die Zeit unterschiedlich schnell.

a) Einfluss der Speziellen Relativitätstheorie

Die Spezielle Relativitätstheorie kommt zu dem Ergebnis, dass die Zeit für eine sich bewegende Uhr langsamer vergeht als bei einer ruhenden Uhr – in einfachen Worten:

Bewegte Uhren gehen langsamer.

Würde man sich z.B. sein ganzes Leben lang mit 800 km/h bewegen, würde die eigene Uhr am Ende gegenüber der Uhr eines ruhenden Beobachters um etwa 0,7 Millisekunden nachgehen. Dieser Effekt ist aber derart gering, dass wir ihn im normalen Leben nicht bemerken können – wer bewegt sich schon so schnell …

Bei der Satellitennavigation machen aber bereits kleine Ungenauigkeiten in der Zeitmessung große Unterschiede in der Entfernung aus. Dies liegt an dem unglaublich großen Betrag der Lichtgeschwindigkeit von c = 300.000.000 m/s, mit welcher sich die Satellitensignale ausbreiten.

Berechne, welche Strecke ein Satellitensignal in 0,7 Millisekunden zurücklegen würde.

Antwort: ______________________________

____

____

____

Navigationssatelliten bewegen sich deutlich schneller als 800 km/h, nämlich im Fall von GPS-Satelliten ca. v = 3,8 km/s. Daher ist auch der Einfluss der Relativitätstheorie auf Uhren im Satelliten deutlich größer. Dank Einstein kann man ausrechnen, wie schnell die Zeit auf einem Satelliten vergeht, der sich mit der Geschwindigkeit v relativ zur Erde bewegt. Sei t_{ruhe} die Zeitspanne, die auf der Erde vergeht und t_{bewegt} die Zeitspanne des sich bewegenden Objektes. Dann hängen t_{ruhe} und t_{bewegt} folgendermaßen zusammen:

$$t_{bewegt} = t_{ruhe} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

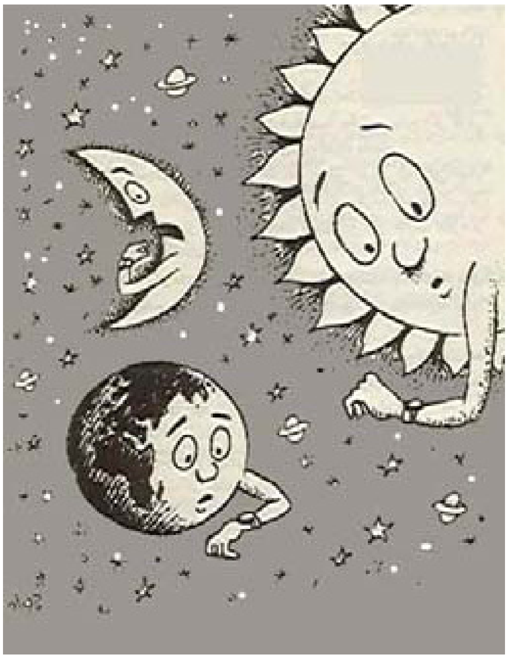
Das würde bedeuten, dass die Zeit im bewegten Satelliten langsamer vergeht als auf der relativ zu ihm ruhenden Erde.

Berechne das Verhältnis t_{bewegt}/t_{ruhe} und finde so heraus, um wie viel Prozent die Satelliten-Uhren langsamer gehen, weil sie sich so schnell bewegen. Zur Berechnung brauchst du einen Computer!

Ergebnis zur Kontrolle: t_{bewegt}/t_{ruhe} = 0,9999999999165 = 1 – 0,835 x10^{-10}.

Das bedeutet nichts anderes, als dass wir (bei Beschränkung auf Messungen im Ruhesystem der Erde) die Zeitabläufe im Satelliten um etwa 0,835 x10^{-8} Prozent überschätzen würden. Anders gesprochen: Die Satelliten-Uhr würde langsamer „ticken“ als eine Vergleichs-Uhr auf der Erde.

b) Einfluss der Allgemeinen Relativitätstheorie



Eine weitere Eigenart der Zeit ist es, sich auch noch nach der Gravitationskraft zu richten, welche auf sie einwirkt. Genau genommen ist das Konzept der Gravitationskraft nicht vollständig richtig und muss durch die Allgemeine Relativitätstheorie ersetzt werden – doch das müssen wir hier ignorieren, da es viel zu weit führen würde. In einfachen Worten kann man auch hier wieder einen Merksatz formulieren:

Schwere Uhren gehen langsamer.

Der „Mann im Mond" altert also am schnellsten, auf der Sonne würde man viel langsamer altern – sicher aber nur ein schwacher Trost angesichts der hohen Temperaturen …

Navigationssatelliten befinden sich nicht auf der Erde, sondern ca. 20.000 km von ihrer Oberfläche entfernt. In dieser Höhe wirkt auf sie und ihre Uhren eine geringere Gravitationskraft als auf der Erde.

Gib an, ob die Satelliten-Uhren deshalb schneller oder langsamer gehen als irdische Uhren.

Die Zeit, die eine Satelliten-Uhr im Abstand r_S vom Erdmittelpunkt misst, kann man folgendermaßen berechnen:

$$t_{Satellit} = t_{Erde}(1 + \Delta U / c^2)$$

Dabei ist ΔU die Potentialdifferenz zwischen Sender S und Empfänger E im Schwerefeld der Erde (m_{Erde} = Erdmasse, G = Gravitationskonstante, r_E = Erdradius):

$$\Delta U = G \cdot m_{Erde} \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_S} \right)$$

Berechne das Verhältnis $tS_{atellit}/t_{Erde}$ und finde so heraus, um wie viel Prozent die Satelliten-Uhren schneller gehen, weil sie so weit von der Erde entfernt sind. Tipp: Die benötigten Zahlenwerte findest du im Internet und in deiner Formelsammlung. Achte auf die richtigen Einheiten!

Ergebnis zur Kontrolle: $t_{Satellit}/t_{Erde} = 1{,}000000000528 = 1 + 5{,}28 \times 10^{-10}$.

Das bedeutet nichts anderes, als dass wir (bei Beschränkung auf Messungen im Ruhesystem der Erde) die Zeitabläufe im Satelliten um etwa 5,28 x10^{-8} Prozent unterschätzen würden. Anders gesprochen: Die Satelliten-Uhr würde schneller „ticken" als eine Vergleichs-Uhr auf der Erde.

Wir haben also zwei gegenläufige Effekte: Nach der Speziellen Relativitätstheorie gehen die Satelliten-Uhren um 0,835 x 10^{-8} Prozent langsamer und nach der Allgemeinen Relativitätstheorie um 5,28 x 10^{-8} Prozent schneller als vergleichbare Uhren auf der Erde.

Das heißt: Insgesamt gehen die Satelliten-Uhren also um (5,28 x 10^{-8} – 0,835 x 10^{-8}) Prozent = 4,44 x 10^{-8} Prozent schneller als Uhren auf der Erde.